Ecología de la modelización matemática: los recorridos de estudio e investigación

Berta Barquero
Dept. Didàctica de les Matemàtiques i les Ciències Experimentals,
Universitat de Barcelona, España

Marianna Bosch
IQS School of Management, Universitat Ramon Llull, España

Josep Gascón
Dept. Matemàtiques, Universitat Autònoma de Barcelona, España

Abstract. This paper focuses on the study of the ecology of mathematical modelling in the teaching of mathematics at university level. We introduce the notion of "study and research courses" (SRC) as the "ideal" didactic organization for integrating mathematical modelling in current university teaching systems. Focusing on the local ecology of SRC, we explore the constraints coming from the dominant epistemological and educational models of the scientific university community.

Résumé. Ce travail est centré sur l'étude de l'écologie de la modélisation mathématique dans l'enseignement universitaire des mathématiques. Nous proposons d'utiliser les parcours d'étude et de recherche (PER) comme nouveau type d'organisation didactique, qui permet l'intégration de la modélisation mathématique dans les systèmes d'enseignement universitaire. Pour approcher le problème de l'écologie « locale » des PER, nous étudions les contraintes qui émanent des modèles épistémologique et pédagogique dominants dans les institutions universitaires.

Resumen. Este trabajo se centra en el estudio de la ecología de la modelización matemática en la enseñanza universitaria de las matemáticas. Se proponen los recorridos de estudio e investigación (REI) como un nuevo tipo de organización didáctica que permite la integración modelización matemática en los sistemas de enseñanza universitarios. Para abordar el problema de la ecología «local» requerida por los REI, estudiamos las restricciones que provienen de los modelos epistemológico y pedagógico imperantes en las instituciones universitarias.

Bosch, M., Gascón, J., Ruiz Olarría, A., Artaud, M., Bronner, A., Chevallard, Y., Cirade, G., Ladage, C. & Larguier, M. (Eds.), *Un panorama de la TAD* (pp. 553-577)

III Congreso Internacional sobre la TAD (Sant Hilari Sacalm, 25-29 enero 2010)

Eje 3. *Teoría y práctica de las AEI y los REI*

CRM Documents, vol. 10, Centre de Recerca Matemàtica, Bellaterra (Barcelona), 2011

1. El problema didáctico de la enseñanza de la modelización matemática

El punto de partida de nuestra investigación se sitúa en la enseñanza de las matemáticas en las facultades de Ciencias Experimentales (CCEE) y se centra, más concretamente, en el estudio de la *ecología de la modelización matemática* en este ámbito institucional, es decir, el estudio de las *restricciones* que dificultan y de las *condiciones* que se requieren para que la actividad de modelización matemática pueda vivir con normalidad en los actuales sistemas en enseñanza universitarios.

En los trabajos de Berta Barquero, Marianna Bosch y Josep Gascón (2007 y 2011) se introduce la respuesta vastamente extendida que dan los actuales sistemas de enseñanza universitarios al problema docente de la enseñanza de las matemáticas en CCEE. En ella se observa que el propósito de integrar la modelización matemática se mantiene como una aspiración utópica que raramente llega a realizarse en la realidad de las aulas.

Situándonos en el ámbito de la TAD, cuestionaremos la concepción común de los procesos de modelización y los situaremos dentro del modelo general de las matemáticas y de la difusión de los conocimientos matemáticos que propone este marco teórico en términos de praxeologías matemáticas y didácticas. Esta reformulación nos permitirá formular el problema didáctico de la modelización matemática en términos del enfoque ecológico y nos conducirá a la búsqueda de dispositivos didácticos que favorezcan la integración de la modelización matemática en la enseñanza universitaria.

La concepción de la modelización que propone la TAD implica que la enseñanza de la modelización matemática se convierta en «sinónimo» de la enseñanza funcional de las matemáticas en contraposición a una enseñanza meramente formal. Por lo tanto, desde esta perspectiva, la modelización matemática debe formar parte integrante de cualquier proceso de estudio de matemáticas. Esta integración constituye un aspecto esencial del problema de investigación que trataremos aquí y permite postular que no tiene sentido pensar en la enseñanza de la modelización matemática independientemente de la enseñanza de las matemáticas.

¿Qué tipo de *dispositivos didácticos* posibilitarían una integración global (más allá de una experimentación local) de la modelización matemática (interpretada como la TAD propone) en los citados sistemas de enseñanza?

Como respuesta a este problema, introduciremos la noción de *recorridos de estudio e investigación* (REI) (Chevallard, 2004, 2005 y 2006) como nuevo tipo de organización didáctica que, en contra del punto de vista «monumentalista» que pone en primer plano el estudio o «visita» de los saberes cristalizados, apuesta por la introducción de una nueva epistemología escolar que debería reemplazar el *paradigma escolar de «inventariar» los saberes* por un paradigma de *cuestionamiento del mundo*. En cierta manera, los REI representan, como veremos, la materialización de lo que la TAD considera como procesos didácticos basados en una enseñanza «funcional» de las matemáticas.

En el trabajo citado de Barquero et al. (2007) se encuentra descrito el «diseño matemático» de un posible REI. En él se exponían los distintos tratamientos que se pueden dar al estudio de una cuestión generatriz sobre el estudio de la dinámica de poblaciones (de animales, organismos, personas, etc.) según el tipo de hipótesis sobre la población y su crecimiento. Estos tratamientos consisten básicamente en la construcción de modelos matemáticos que, tomando en cuenta las hipótesis formuladas, permiten elaborar elementos de respuesta a la cuestión generatriz y a sus derivadas. En efecto, el uso de cada modelo, si bien aporta soluciones parciales a los problemas que se plantean, también muestra limitaciones que se superan mediante la ampliación del modelo y la modificación de las hipótesis de partida. Se obtienen así distintas ampliaciones sucesivas de los modelos matemáticos considerados y distintas bifurcaciones según el tipo de población considerado, lo que da lugar a un «mapa de posibles trayectorias» para el estudio de la cuestión inicial. Este mapa de recorridos, elaborado desde la investigación didáctica, ha funcionado entonces como un modelo de referencia para el diseño, la gestión y la evaluación de las cuatro experimentaciones que hemos realizado. En dichas experimentaciones hemos puesto en práctica tres REI centrados en la cuestión inicial del estudio de la dinámica de poblaciones, considerando en cada caso un tipo de población o de dimensión temporal distinto: poblaciones con generaciones separadas o mezcladas y evolución en tiempo discreto o continuo (Barquero, 2009).

Al margen de esta variabilidad en parte circunstancial y en parte debida a la evolución misma del trabajo experimental, las cuatro experimentaciones realizadas hasta el momento [1] han puesto de manifiesto un conjunto de regularidades o invariantes que nos permiten describir en, una primera aproximación, la «ecología didáctica» de los REI, esto es, al conjunto de condiciones que posibilitan su desarrollo como organización de los procesos de estudio universitarios y el conjunto de restricciones que limitan dicho desarrollo y podrían, a la larga, poner en peligro su viabilidad. Más concretamente, el problema didáctico que nos proponemos indagar puede formularse en los términos siguientes:

¿Qué condiciones se requieren y qué restricciones dificultan o impiden que las matemáticas se enseñen, se aprendan, estudien y utilicen como herramientas de modelización en los actuales sistemas de enseñanza de las matemáticas para CCEE? ¿En qué niveles de la escala de codeterminación matemático-didáctica aparecen estas restricciones y en qué nivel deberíamos situarnos en cada caso para poder considerarlas como condiciones «modificables»?

En trabajos anteriores centrados en la implantación «local» de los REI, se han analizado algunas de estas restricciones que provienen principalmente del contrato didáctico institucional y de la organización tradicional de las matemáticas, que podemos situar entre el nivel pedagógico y los niveles específicos de la disciplina matemática (área, sector, tema y cuestión). En este trabajo se aborda el problema de la «ecología global» de los REI como propuesta didáctica para la enseñanza de la modelización matemática, centrándose en el análisis de restricciones que aparecen en los niveles más genéricos de codeterminación matemático-didáctica, aquellos que se sitúan más allá de la propia disciplina matemática: los niveles de la *pedagogía*, *escuela*, *sociedad* y *civilización*. Más concreta-

1. En Barquero (2006 y 2009) se encuentran descritas las cuatro experimentaciones desarrolladas durante los cursos académicos 2005/06, 2006/07, 2007/08 y 2008/09.

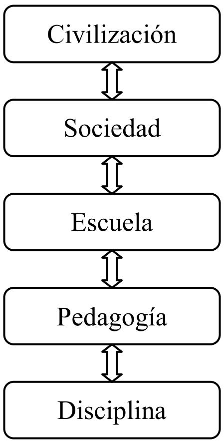

Figura 1. Niveles superiores de codeterminación

mente, nos centraremos en describir las restricciones que provienen de la epistemología y de la ideología pedagógica dominante en la comunidad científica universitaria.

Así, en primer lugar, situándonos en los niveles de *sociedad* y *escuela*, nos proponemos indagar sobre la *epistemología dominante*[2] en la institución docente considerada, la universidad, y sobre su incidencia en las posibles prácticas de enseñanza de las matemáticas en los primeros cursos universitarios de CCEE. Postulamos que la respuesta que prevalece en la cultura científica universitaria se puede caracterizar como «aplicacionista» en el sentido siguiente: se establece, de entrada, una separación rígida entre las matemáticas y las demás ciencias (en particular, las experimentales como la biología o la geología) de tal forma que las primeras, una vez construidas, «se aplican» a las segundas sin «contaminarse» por ellas y sin que ello suponga ningún cambio relevante ni para las matemáticas ni para la problemática de las CCEE a cuyo estudio contribuyen. Así, por ejemplo, en la mayoría de las asignaturas de matemáticas en universidades españolas que hemos examinado, el tema del estudio de la dinámica de poblaciones se propone como un ejemplo de las «aplicaciones» del sector de las ecuaciones diferenciales, como si esta dinámica pudiera existir sin la herramienta matemática que permite describirla y como si, al mismo tiempo, las ecuaciones diferenciales pudiesen existir independientemente de cualquier problema extramatemático. Así, bajo la influencia del «aplicacionismo», la actividad de modelización es entendida e identificada como una mera aplicación de conocimientos previamente construidos o, en el caso extremo, como una simple «ejemplificación» de

2. Entendemos por «epistemología dominante» (de las matemáticas) la forma concreta en la que las universidades como instituciones docentes y, más concretamente, la comunidad de agentes que intervienen en los procesos de estudio de las matemáticas, los profesores universitarios (y los estudiantes), interpretan qué son las matemáticas y cuál es su relación con las CCEE.

herramientas matemáticas a algún contexto extramatemático construido con anterioridad para encajar con dichas herramientas.

Más concretamente, las principales características del aplicacionismo pueden describirse a partir de los siguientes indicadores que han sido utilizados para contrastar empíricamente en qué grado el aplicacionismo prevalece en las instituciones universitarias. Hasta el momento se han analizado los principales materiales de enseñanza (programas de las asignaturas de matemáticas, prefacios de libros de referencia, materiales curriculares, etc.), además de las respuestas a un cuestionario y entrevistas al profesorado universitario de departamentos de CCEE de la Universitat Autònoma de Barcelona.

I_1: *Las matemáticas se mantienen independientes de las otras disciplinas* («*purificación epistemológica*»). Las matemáticas no se mezclan con los sistemas que modelizan ni se modifican al «aplicarse» y, en consecuencia, son consideradas independientes de dichos sistemas y se aplican en todos los casos de la misma manera.

I_2: *Las herramientas matemáticas que se utilizan para resolver problemas científicos forman parte de una formación matemática básica común para todos los científicos*. No se concibe ningún tipo de especificidad ni en las nociones matemáticas ni, tampoco, en el tipo de técnicas y tecnologías matemáticas integrantes de dichas formación matemáticas básica.

I_3: *La enseñanza de las matemáticas sigue la lógica deductivista* (*lógica de los modelos*). Tratándose de un indicador global de la «independencia» entre matemáticas y CCEE a las que se aplican, viene a reforzar a nivel disciplinar lo que el anterior indicador ponía de manifiesto a niveles más específicos.

I_4: Dado que las «aplicaciones» vienen después de una formación matemática básica, se destaca una proliferación de cuestiones aisladas con origen en distintos sistemas y que se mantienen fijas. Viene a destacar el progresivo desvanecimiento de una problemática general relativamente unificada que constituye, en primera instancia, la razón de ser y el motor del proceso de estudio de un tema científico.

I_5: *La enseñanza de las herramientas matemáticas básicas siempre es anterior a su aplicación*. Se asume que lo primero es aprender a manipular los componentes de los modelos matemáticos más importantes y después ya se aprenderá a utilizarlos en cada ámbito particular del trabajo.

I_6: Se podrían enseñar los sistemas (de las CCEE) sin los modelos (matemáticos), es decir, se podrían enseñar CCEE sin matemáticas. Como indicador extremo de la independencia entre las matemáticas y las CCEE se basa en la creencia de que, en última instancia, podría prescindirse de estas en la enseñanza de las CCEE o reservarlas solo para ejemplificar los aspectos cuantitativos de ciertos fenómenos científicos.

En segundo lugar, situándonos en el nivel de la *pedagogía*, indagaremos los principales rasgos de la «pedagógica dominante» en la comunidad científica universitaria, esto es, la forma concreta y generalizada como se interpreta el aprender y enseñar matemáticas en los actuales sistemas de enseñanza universitarios.

Ambas caracterizaciones que sustentan al modelo docente que actualmente «vive» en las instituciones universitarias nos proporcionarán la base para poder precisar en los próximos apartados las restricciones que dificultan (y hasta impiden) la posible integración de la modelización matemática en las instituciones universitarias. Dada la consistencia institucional de dichas restricciones y el hecho, innegable, de que responden a cierta «economía didáctica», hemos de reconocer que no serán fácilmente modificables.

2. Restricciones debidas a la epistemología dominante en la comunidad científica universitaria

Una vez mostrado el grado de influencia e impacto que tiene el aplicacionismo en la comunidad científica universitaria (Barquero et al., 2007; Barquero, 2009), su caracterización nos sirve para describir y analizar las *restricciones* a la vida de la modelización matemática que se derivan de la interpretación «aplicacionista» de la modelización matemática y del papel que esta toma en la enseñanza de las matemáticas para las CCEE.

Uno de los principales rasgos del aplicacionismo, y que supone una de las restricciones más fuertes a la vida «normal» de la modelización matemática, proviene de la distinción neta entre las matemáticas y el resto de CCEE. En general, las matemáticas enseñadas presentan una estructura muy estereotipada y cristalizada que no se mezcla con los sistemas que se modelizan y, además, las matemáticas enseñadas nunca se modifican como consecuencia de ser aplicadas. Se supone además que ambos mundos evolucionan con lógicas independientes y sin ninguna interacción. Este hecho, que se ha contrastado experimentalmente con los tres primeros indicadores del aplicacionismo, lleva a reducir enormemente el posible papel de las matemáticas como instrumento de modelización de los sistemas científicos e incluso niega el papel de las matemáticas como herramienta clave para el estudio de problemas que aparecen en los sistemas extramatemáticos.

Esta separación radical entre matemáticas y CCEE impide considerar las matemáticas como una herramienta constitutiva de las CCEE (Koyré, 2000). Podemos considerar esta característica extrema del aplicacionismo como una de las restricciones más genéricas que, apareciendo en los niveles de la *sociedad* y de la *escuela*, se basa en no considerar las matemáticas como una herramienta fundamental para la búsqueda de respuestas y la elaboración de cuestiones problemáticas que pueden aparecer en distintos ámbitos de la realidad.

En contraposición al aplicacionismo y al modelo epistemológico que lo sustenta, debemos hacer referencia al modelo epistemológico propuesto por la TAD y a la forma como se integra la modelización matemática en dicho modelo. En este modelo se concluye que no se puede considerar que los procesos de modelización matemática sean independientes del resto de la actividad matemática y se explica por qué la actividad matemática no puede interpretarse como un «añadido» para unir ambos mundos, el matemático y el de las CCEE. En el ámbito de la TAD, las matemáticas son consideradas la herramienta clave de modelización de todo tipo de sistemas, esto es, de búsqueda de respuesta a cuestiones problemáticas y, por lo tanto, constitutiva de la construcción de todo conocimiento científico. Esto significa que determinados fenómenos físicos, químicos, biológicos, etc. *se construyen* en el proceso de modelización matemática (no antes ni de forma independiente).

Esto nos conduce a pensar en una primera condición necesaria para que la modelización matemática pueda desempeñar en la actividad científica escolar el pleno papel constitutivo que la TAD le otorga. En este sentido, las cuestiones problemáticas «vivas» deben (re)situarse en el origen y núcleo de la actividad matemática cuyo estudio va a requerir iniciar un proceso de modelización matemática para poder aportar una respuesta. En este primer proceso se pueden generar nuevas cuestiones, de naturaleza matemática o extramatemática, que darán lugar a nuevos procesos de modelización. En esta dinámica deja de tener sentido pensar en dos lógicas distintas e independientes que rigen ambos mundos, el matemático y el del resto de disciplinas científicas. Se impone pensar en un único mundo, el de la actividad científica del que la modelización matemática forma parte de manera indisoluble.

Estrechamente relacionado con lo anterior, y más allá de la ausencia de la razón de ser de la matemática escolar, aparecen nuevas restricciones a la vida escolar (aquí universitaria) de la modelización matemática relacionadas con el aplicacionismo. Por ejemplo, el suponer que los modelos matemáticos preexisten a los sistemas científicos y que las dos realidades, las matemáticas que fabrican modelos y las CCEE que constituyen el ámbito de los sistemas, mantiene una relación unidireccional (en tiempo y modo): primero se construye el modelo matemático y luego «se aplica» a los sistemas extramatemáticos que se modelizan. Con ello se supone, además, que ni los modelos ni los sistemas evolucionan; ambas entidades, modelos y sistemas, son consideradas estáticas a lo largo del proceso de estudio: ni la problemática planteada en los sistemas científicos evoluciona ni los modelos se modifican lo más mínimo para poder ser utilizados.

A diferencia de estos presupuestos comunes, en la conceptualización de los procesos de modelización matemática que propone la TAD, las cuestiones problemáticas se sitúan en el punto de partida de la actividad. La búsqueda constante de respuestas a dichas cuestiones va a conducir a la (re)construcción de un gran número de organizaciones matemáticas que raramente pueden estar fijadas de antemano. Por lo tanto, no tiene sentido limitar a priori la utilización de ciertas herramientas matemáticas preestablecidas, si no se quiere limitar a su vez la actividad de modelización matemática.

Otra de las restricciones del aplicacionismo sobre la vida de la modelización matemática se pone de manifiesto en la organización habitual de los programas de matemáticas que se imparten en los estudios de CCEE.

En efecto, ni la estructura que se da a los contenidos ni la forma de desarrollarlos en clase dan la posibilidad de llevar a cabo un trabajo de construcción de modelos matemáticos en relación al estudio de cuestiones problemáticas que surgen en ámbitos científicos cercanos a la especialidad escogida por los estudiantes. La razón de ser (matemática o extramatemática) de los contenidos, que forman parte de esta formación matemática básica que deben adquirir los estudiantes, no forma parte del programa de estudio. La actividad de modelización se restringe y limita a la simple ilustración o ejemplificación puntual y anecdótica de ciertos modelos preestablecidos a sistemas dotados de una problemática fijada de antemano.

Este conjunto de restricciones, que limita enormemente la naturaleza y estructura de las posibles matemáticas a enseñar y, sobre todo, el papel de dichas matemáticas en el estudio de las CCEE, pueden considerarse en primera instancia como restricciones que surgen en los niveles de la *pedagogía* y de la *disciplina* pero sin dejar de mencionar el gran impacto que tienen estas restricciones en los niveles específicos de codeterminación matemático-didácticos, esto es, en la forma concreta como se organiza la matemática enseñadas en *áreas*, *sectores*, *temas* y *cuestiones*.

Todas estas restricciones provenientes del aplicacionismo dificultan fuertemente (y casi impiden) que la modelización matemática juegue el papel que se le otorga en el modelo epistemológico que propone la TAD. En particular podemos decir que las actividades (aisladas y puntuales) que tienen relación con algunos aspectos del proceso de modelización matemática y que aparecen en los actuales sistemas universitarios de enseñanza de las CCEE no pueden constituirse de ninguna manera en el instrumento de articulación de la actividad científica que la TAD le adjudica.

3. Restricciones debidas a la pedagogía dominante en las instituciones universitarias

El análisis de las condiciones que se requieren para la vida normal de la modelización matemática en el sistema de enseñanza universitario plantean la necesidad de superar, no solo la epistemología «aplicacionista» imperante, sino también las restricciones que impone la pedagógica dominante en el sistema de enseñanza universitaria, esto es, la forma concreta y generalizada que tiene la comunidad universitaria de interpretar qué es aprender y enseñar matemáticas.

Nos centraremos en este apartado en presentar de forma muy esquemática algunos de los rasgos destacados de la pedagogía dominante, que requerirán, en futuras investigaciones, de un estudio más sistemático. Postulamos que, en la medida que el modelo docente vigente en los sistemas de enseñanza universitaria de CCEE participe de dicha pedagogía, existirán serias restricciones sobre la vida de la modelización matemática. Las principales características de la pedagogía dominante pueden ser brevemente descritas en los términos siguientes:[3]

Las cuestiones problemáticas Q, esto es, las razones de ser de las posibles praxeologías, no son centrales en los procesos de estudio y tienden a desaparecer. Esta dificultad para centrar el proceso didáctico en el estudio de cuestiones es una clara restricción a una enseñanza de las matemáticas como actividad de modelización.

El objetivo de los procesos de enseñanza está establecido de antemano y formulado en términos de contenidos del saber a enseñar. Con esta característica, que supone una fuerte restricción para la modelización matemática, se elimina prácticamente el posible papel de las sucesivas respuestas provisionales que se generarían y que constituyen el núcleo de todo proceso de modelización. Se da a los conocimientos previamente disponibles un papel decisivo.

Durante el estudio de cuestiones problemáticas no se considera la existencia de posibles respuestas preestablecidas que sean diferentes a las que aporta el profesor y cuya validez y pertinencia estarían por contrastar.

La tradición escolar apoya la recopilación formal de textos en los que se encuentran «inscritas» las respuestas preestablecidas aceptadas por la institución. Este hábito de la tradición escolar tiende a provocar una

3. Notemos que la pedagogía dominante, de la que comentaremos algunas de sus características, es un modelo docente «ideal» en el sentido que no ha existido nunca en estado puro (Gascón, 2001). Lo mismo podríamos decir de la epistemología dominante que sustenta al aplicacionismo. En ambos casos utilizamos un concepto teórico para analizar, por contraste, la realidad empírica.

escasez documental que termina por favorecer el trabajo con medios inmediatamente adaptables a los programas de estudio.

La pedagogía dominante tiene una concepción individualista del proceso de estudio. Se destaca la preponderancia del trabajo individual bajo las órdenes del profesor. Los estudiantes quedan encerrados en un comportamiento autónomo dirigido por las demandas del profesor.

A esta pedagogía dominante que comparte muchos rasgos de la que hemos denominado ideología «monumentalista» se le añade otra ideología pedagógica que llamaremos «generalista» y que se caracteriza por el hecho de enfatizar rasgos genéricos (en el sentido de independientes de todo saber disciplinar) presuntamente aplicables a todo proceso de enseñanza y aprendizaje:

Se separa el contenido de la enseñanza de la forma de organizar el proceso de enseñanza que, al suponerse independiente de los contenidos a enseñar, se pretende común a todos ellos. Como consecuencia se produce, en el caso de las matemáticas, una separación radical entre la enseñanza de las matemáticas y la actividad generadora [4] de las matemáticas que se enseñan (que está en el origen de estas).

En la medida que en la matemática enseñada se eliminan todos los rasgos propios del «hacer matemáticas» (esto es, todos los rasgos de estudio e investigación) se está impidiendo llevar a cabo una genuina actividad de modelización matemática.

Se tiende a problematizar la forma de organizar el proceso de enseñanza-aprendizaje mientras que, por el contrario, los contenidos de la enseñanza (matemático-científicos u otros cualesquiera) se suponen transparentes y no problemáticos.

Dado que el carácter problemático, provisional y parcial de las sucesivas respuestas que pueden aportarse a una cuestión científica constituye el «nervio» de todo proceso de modelización matemática (en el sentido que la TAD lo conceptualiza) este rasgo de la ideología pedagógica, en la medida que se está incorporando al modelo docente dominante en las instituciones responsables de la enseñanza universitaria de las CCEE,

4. Entendemos por «hacer matemáticas» o «actividad generadora de las matemáticas», en sentido amplio, cualquier actividad que utiliza las matemáticas tanto para construir nuevas matemáticas como para construir conocimientos en cualquier otro ámbito.

constituye un impedimento para la vida de la modelización matemática en dichas instituciones.

A fin de evitar que los alumnos se alejen y separen de la institución escolar, se tiende a eliminar aquellos aspectos *disciplinares* que por su especial dureza y exigencia dificultan, presuntamente, la vida escolar de la mayoría de los alumnos. En base a este principio «proteccionista» hemos visto en la enseñanza primaria y en la secundaria, y empezamos a observar en la enseñanza universitaria, una fuerte tendencia a:

– disminuir progresivamente los objetivos a largo plazo, al tiempo que toma fuerza el mito de la comprensión inmediata y casi instantánea.
– atomizar la matemática enseñada (y, en general, los contenidos de la enseñanza) que lleva a convertirla en un conjunto de anécdotas independientes entre sí.
– hacer desaparecer progresivamente el trabajo sistemático, paciente, a largo plazo, y de toda actividad que pueda ser considerada como rutinaria, por considerarla repetitiva y aburrida.
– sobrevalorar «lo concreto» como motivador frente a «lo abstracto» como aburrido y difícil.

Todos estos rasgos constituyen restricciones importantes a la vida de la modelización matemática puesto que esta constituye el prototipo de actividad sistemática, a largo plazo, con respuestas siempre provisionales y una comprensión permanentemente incompleta.

Algunas de las características de la pedagogía dominante que acabamos de sintetizar junto con las que se derivaban del aplicacionismo como epistemología dominante en las instituciones universitarias, comportan múltiples restricciones a la vida de la modelización matemática. Su estudio nos permitirá discernir, dentro de la escala de niveles de codeterminación matemático-didáctica, qué condiciones se han de modificar en cada nivel para conseguir una verdadera integración de la modelización matemática. Para ello será necesario introducir un nuevo tipo de organización didáctica con nuevos dispositivos y «gestos» didácticos que hasta ahora permanecían recluidos en el ámbito privado de la investigación y que no tienen una entrada fácil en el contrato didáctico habitual.

4. Hacia una integración de la modelización matemática: los recorridos de estudio e investigación

En los apartados anteriores hemos descrito las restricciones que provienen, respectivamente, de los modelos epistemológico y didáctico dominantes en las instituciones universitarias y que inciden sobre la vida de la modelización matemática. A este respecto habría que añadir que no se trata de dos tipos de restricciones que sean independientes entre sí. Tal como se ha mostrado en algunos trabajos anteriores realizados en el ámbito de la TAD, el modelo epistemológico de las matemáticas dominante en una institución docente, esto es, la forma particular de interpretar y describir las matemáticas en dicha institución, condiciona fuertemente la manera de interpretar (por parte de los sujetos de dicha institución) en qué consiste enseñar y aprender matemáticas, esto es, el modelo docente vigente en la misma (Gascón, 2001). Incluso podría decirse que el modelo epistemológico dominante en una institución constituye un componente esencial de la tecnología didáctica en dicha institución (Bolea, Bosch & Gascón, 2001).

A lo largo de este trabajo nos hemos referido a los recorridos de estudio e investigación (REI) como un nuevo tipo de organización didáctica que podemos utilizar como modelo de referencia para el análisis, diseño y experimentación de los modelos docentes no «monumentalistas» cuyo objetivo principal es el de introducir una nueva epistemología en la escuela cuyo paradigma central viene a reemplazar el paradigma de «inventariar» los saberes por un paradigma de cuestionamiento del mundo con el que se dé sentido y funcionalidad al estudio escolar de las matemáticas en su conjunto (Chevallard, 2009). Podemos formalizar la noción de los REI con el esquema siguiente:

$$[S(X\,;Y\,;Q_0) \curvearrowright \{R_1^{\lozenge}, R_2^{\lozenge}, \ldots, R_n^{\lozenge}, O_{n+1}, \ldots, O_m\}] \hookrightarrow R^{\heartsuit}.$$

A continuación, vamos a clarificar el significado de este esquema y a describir algunas de las propiedades generales de las organizaciones didácticas «ideales» que se desprenden de la noción de REI y que aparecen como una respuesta apropiada a las carencias que están en el origen de algunas de las restricciones que dificultan e incluso impiden la integración de la modelización matemática en las instituciones escolares.

4.1. Las cuestiones generatrices como punto de partida de procesos de estudio funcionales

El punto de partida de un REI debe ser una cuestión «viva» para la comunidad de estudio, que denotaremos por Q_0 y a la que llamaremos *cuestión generatriz* del proceso de estudio. Esta no debe ser una cuestión impuesta por el profesor por ciertas necesidades didácticas que este se proponga. En otras palabras, el objetivo de plantear Q_0 no es el de la construcción de cierta OM fijada de antemano sino que el objetivo de plantear Q_0 es su estudio, es decir, la búsqueda de respuestas a Q_0 se debe convertir en un fin en sí mismo.

Esta cuestión generatriz Q_0 debe ser «tomada en serio» por la comunidad de estudio ya que su respuesta debe permitir actuar en algún sentido importante (vital). La respuesta buscada no se puede limitar a una simple información; el estudio de Q_0 debe requerir la construcción de toda una organización matemática como respuesta, es decir, la construcción de un conjunto de tipo de problemas, de técnicas para resolver estos problemas, y de elementos tecnológico-teóricos que permitan explicar y justificar el trabajo realizado (Chevallard, 1999). Nos referiremos a ello diciendo que la cuestión Q_0 debe requerir una respuesta en sentido fuerte. La cuestión Q_0, junto con las diversas cuestiones que se derivarán de su estudio, van a ser en realidad el origen, motor y razón de ser de todo el proceso de estudio. Q_0 deberá entonces estar presente durante todo el proceso de estudio y actuar como eje articulador de dicho proceso. Esto no significa que Q_0 sea inmutable sino que, al contrario Q_0 evoluciona y se desarrolla a lo largo del proceso de estudio. Un buen ejemplo lo encontramos en el caso del diseño y experimentación de los REI en torno al estudio de la dinámica de poblaciones (Barquero, 2009).

4.2. La estructura «arborescente» de los REI

A lo largo del REI, el estudio de la cuestión generatriz Q_0 evoluciona y da lugar al planteo de muchas nuevas «cuestiones derivadas»: $Q_1, Q_2, \dots, Q_n$ cuya pertinencia debe ser constantemente cuestionada. En este sentido, el criterio esencial para decidir sobre la pertinencia y buena formulación de Q_i es su capacidad de proporcionar respuestas R_i que ayuden a elaborar una respuesta a Q_0.

El estudio de Q_0 y de sus respectivas cuestiones derivadas conduce a la búsqueda de respuestas y con ello a la construcción de un gran número de saberes que delimita el mapa y límites provisionales del «territorio» del proceso de estudio. Este proceso, que podremos sintetizar como un conjunto o cadena de cuestiones y de respuestas, contendrá las posibles trayectorias a «recorrer» generadas a partir del estudio de Q_0.

$$Q_0 \to \begin{cases} (Q_0', R_0') \to (Q_1', R_1') \ldots \to (Q_p', R_p') \\ (Q_0'', R_0'') \to (Q_1'', R_1'') \ldots \to (Q_q'', R_q'') \\ \ldots \end{cases}$$

Postulamos entonces que el trabajo de producción o construcción de $R^{\heartsuit}$ podrá describirse como una arborescencia de cuestiones Q_i y de respuestas provisionales ($R_i = OM_i$) relacionadas entre sí mediante un proceso de modelización progresiva y recursiva.

Destacamos así la importancia del diseño matemático a priori para garantizar la fecundidad de las cuestiones generatrices iniciales. Aunque no se debe olvidar que en el desarrollo de un REI pueden aparecer nuevas cuestiones «cruciales» a estudiar no previstas de antemano. Se destaca así el *carácter abierto* (no cerrado) *y dinámico* (no estático) de los REI que, en muchas ocasiones, nos puede llevar a plantear cuestiones que traspasen los límites del marco de la propia disciplina que la tradición ha delimitado.

4.3. Los REI y las actividades de estudio e investigación (AEI)

Los REI requieren el paso por diferentes actividades de estudio e investigación (AEI) que provocan la integración de diferentes organizaciones matemáticas locales en estructuras más complejas y completas. En cierto sentido, esta característica de los REI, lejos de ser independiente de las anteriores, responde a las limitaciones de las AEI. Uno de los propósito de los AEI era el de integrar diferentes OM puntuales en una OM local, pero esta integración no llega a traspasar el nivel local y, además, el paso de una AEI a otra no está «motivado» funcionalmente por la propia actividad (Bosch & Gascón, 2007).

Podemos decir en esta dirección que, en un REI, la búsqueda de la respuesta $R^{\heartsuit}$ requerirá «pasar» (construir o estudiar) por diferentes AEI.

Esto nos va a llevar a que las cuestiones que se derivan de Q_0 se planteen y requieran la construcción de OM cada vez más amplias y completas que acabarán conformando una estructura articulada de OM de complejidad creciente. Para ello, la modelización matemática va a tener que tomar un papel esencial en este proceso, situarse en el corazón de la actividad (o, mejor dicho, ser la propia actividad matemática) permitiendo así que se articulen las diferentes OM y se integren en estructuras praxeológicas cada vez de más amplias y completas (pasando por la construcción de OM locales a la integración de estas en OM regionales e incluso OM globales). Las OM son creadas con el objetivo de dar respuesta a ciertas cuestiones problemáticas que se han derivado del estudio de Q_0.

Una de las consecuencias de esta caracterización es que, en el caso concreto de partir del estudio de cuestiones que se plantean en sistemas extramatemáticos, la primera respuesta y las sucesivas respuestas a cuestiones que van apareciendo a lo largo del proceso, se estructuran en términos de praxeologías. Esto significa que estas OM son constitutivas del conocimiento científico. En otros términos, la posibilidad de proporcionar una respuesta científica no existía antes de la construcción de la praxeología matemática en cuestión.

4.4. La dialéctica de los media y los medios

En un REI la construcción de la respuesta deseada $R^{\heartsuit}$ requiere que las sucesivas respuestas «externas» $R_i^{\Diamond}$ aportadas por los *media*, se contrasten experimentalmente con los *medios* O_j apropiados. Esta *dialéctica de los media y los medios* hace referencia, por un lado, a la necesidad de disponer, para la elaboración de las sucesivas respuestas provisionales R_i, de algunas respuestas preestablecidas $R_i^{\Diamond}$ accesibles a través de los diferentes medios de comunicación y difusión: los *media.*

En el caso de las matemáticas, estos *media* son cualquier fuente de información como, por ejemplo, los libros de texto, tratados, artículos de investigación, apuntes de clase, etc. Pero, las respuestas $R_i^{\Diamond}$ son construcciones que se han elaborado para dar respuesta a cuestiones habitualmente diferentes a las que se pueden plantear durante el proceso de estudio y, por lo tanto, deben ser, en cierta manera, «deconstruidas» y «reconstruidas» en función de las propias necesidades. Para y por ello se van a necesitar otro tipo de *medios*, instrumento indispensable para poner a prueba la validez de estas respuestas.

Esta característica de los REI es coherente con el carácter recursivo de la modelización matemática. La cuestión Q_0 surge en el marco de un sistema inicial S_0 que se modeliza inicialmente con un conocimiento disponible $R_1^\lozenge$. Su desarrollo y contraste con un medio $\{O_{1i}\}$ provoca la aparición de nuevas cuestiones Q_i en un nuevo sistema S_1 que engloba $R_1^\lozenge$ y $\{O_{1i}\}$. El proceso sigue con la consideración de nuevos sistemas S_2, S_3, etc. cada vez más complejos y más matematizados.

Digamos que los procesos de estudio basados en los REI requieren no caer en el error de defender las respuestas $R^\heartsuit$(y $R_i^\lozenge$) como respuestas «definitivas» e «incuestionables» a la cuestión Q_0. Por el contrario, el cuestionamiento explícito y constante de las «respuestas provisionales» que se van obteniendo debe incorporarse en todo momento a la actividad. Este será en realidad el motor del proceso de modelización y, por lo tanto, de la estructura arborescente y articulada de los REI. Es esencial que el estudiante tenga acceso a respuestas $R^\lozenge$ que no se reduzcan a la respuesta «oficial» del profesor (o del libro de texto) así como a los medios para validarlas. Aparece aquí un enorme problema de investigación didáctica: ¿qué tipo de dispositivo didáctico posibilitaría llevar a cabo estos gestos y cómo puede integrarse dicho dispositivo en las actuales organizaciones didácticas escolares?

4.5. La dialéctica del individuo y el colectivo

Ya hemos enfatizado el hecho que la pedagogía dominante preconiza una enseñanza cada vez más individualizada y personalizada. Pero la integración plena de la modelización matemática en la actividad científica escolar requiere potenciar el papel de la comunidad de estudio X junto con el del *director* de estudio Y. Esta comunidad de estudio debe ser la encargada de estudiar *colectivamente* la cuestión Q_0 y producir *solidariamente* una respuesta propia $R^\heartsuit$. En contraposición a la preponderancia de un «trabajo individual» y «personalizado» bajo las órdenes de Y, la colectividad de estudiantes con su director de estudio deben repartirse el conjunto de tareas y negociar las responsabilidades que debe asumir cada uno.

Este desplazamiento del «sujeto del estudio», que pasa del individuo a la comunidad, tiene muchas consecuencias importantes en cuanto que posibilita otros gestos esenciales para la vida de la modelización matemática. En particular el estudio comunitario de las cuestiones da la oportunidad de *defender las respuestas R* producidas por la comunidad (aunque estas aún tengan un carácter provisional y estén sujetas a un proceso de estudio en activo) en lugar de aceptar la *imposición de las respuestas oficiales* admitidas por la institución escolar.

4.6. La dialéctica de las preguntas y las respuestas

Otra dialéctica importante que esté en el corazón mismo del proceso de modelización y que incorporan los REI, es la del planteo de preguntas y la búsqueda de respuestas. En el contrato didáctico tradicional, recae generalmente sobre el profesor la responsabilidad de proponer preguntas que sean el motor del estudio, mientras que el estudiante solo plantea dudas o interrogantes que, se supone, el profesor puede contestar rápidamente.

En la experimentación realizada de los REI el desarrollo de la actividad de modelización requiere que la comunidad de estudio se concentre durante un largo periodo de tiempo en el estudio de una misma cuestión, que la mantenga «viva» y «abierta» sesión tras sesión y que sea capaz, además, de derivar del estudio nuevas cuestiones. Además, la pertinencia de estas cuestiones y la oportunidad (o no) de su consideración debe aparecer a su vez como un gesto más del proceso de estudio, a negociar entre el profesor y los estudiantes.

La pedagogía «monumentalista» es ajena a esta dialéctica porque asigna solo al profesor la capacidad de «enseñar» unos monumentos cuyo valor nadie contesta, y porque propone siempre recorridos perfectamente preestablecidos. Para superar las restricciones que aparecían durante la experimentación de los REI (pasividad de los alumnos, demanda de dirección estrechamente guiada al profesor, etc.), la profesora propuso a los estudiantes que, al final de cada sesión, plantearan por lo menos una cuestión o problema que hubiera surgido del trabajo realizado. Al principio de la sesión siguiente se ponían en común estas nuevas cuestiones y se discutía entre todos —bajo la dirección del profesor— el camino a seguir. Como ejemplo de nuevo dispositivo de refuerzo de esta dialéctica podemos citar el de las «preguntas de la semana» experimentado en al ámbito de la formación del profesorado de matemáticas (Cirade, 2006).

4.7. La dialéctica de circunscribirse y salirse del tema

En todo proceso de modelización, cuando se parte de una cuestión científica Q_0 a la que se pretende dar una respuesta en «sentido fuerte», es esencial integrar en la actividad científica escolar la posibilidad de *salirse del tema* al que inicialmente pertenece dicha cuestión y, según la evolución de las cuestiones que se derivan de Q_0, tener incluso la posibilidad de *salirse de la disciplina* de referencia. Por otra parte, es evidente que las cuestiones generatrices que pueden dar lugar a recorridos amplios de estudio e investigación rara vez pueden circunscribirse en el ámbito limitado de un único tema, sector o incluso disciplina.

La necesidad de «tomarse en serio» las cuestiones, es decir la necesidad de aportar respuestas que no sean un mero pretexto para mostrar la utilidad de los nuevos conocimientos enseñados, reclama la necesidad de incorporar el gesto de «*inspeccionar zonas de gran alcance*». Esta inspección, que casi nunca se adecúa de forma inmediata a lo que se busca, conduce a la posibilidad de encontrar cosas «inesperadas» y de poder así hallar aquellas pequeñas «semillas» que hacen posible progresar en la investigación. Es evidente que el encierro disciplinar en el que vive hoy día la enseñanza universitaria —incluso en las CCEE— dificulta mucho este gesto del estudio. Y este también choca frontalmente con la preocupación del profesorado por conocer siempre de antemano el recorrido concreto del proceso de estudio de sus estudiantes.

Esta dialéctica, al igual que las anteriores, pretende modificar la tradición de la pedagogía escolar dominante que muestra una extraña escasez documental para proteger a los estudiantes de la «dispersión» y el «descontrol», y favorecer así el trabajo con medios inmediatamente adaptables a los programas de estudio. La integración de los gestos necesarios para instaurar dichas dialécticas en la actividad escolar requeriría de nuevos dispositivos didácticos que los haga posibles más allá de su presencia puntual y anecdótica.

4.8. La dialéctica de la difusión y recepción de respuestas

En un REI, además de las respuestas externas $R_i^{\lozenge}$, deben tomarse en consideración las respuestas (provisionales) internas R_i: la dialéctica de la difusión y recepción de respuestas. Los procesos de estudio que se proponen como medio posibilitador de una enseñanza de las matemáticas basada en la modelización requieren, como hemos visto, dar importancia a las respuestas que la comunidad aporta a las cuestiones planteadas. Estas cuestiones no son conocimientos importantes por sí mismos (monumentalismo) sino por el tipo de respuesta que permiten aportar y el avance que su utilización supone. Contra la tentación de no dar la oportunidad de defender las propias respuestas R_i producidas y la tendencia a imponer alguna respuesta admisibles dentro de la institución escolar, se debe invitar al grupo de estudiantes a *defender* las sucesivas respuestas R_i que aportan, aunque estas aún tengan un carácter provisional y estén sujetas a un proceso de estudio y revisión «en activo».

En el caso de la experimentación, se introdujo un dispositivo relativamente ajeno a la cultura de la enseñanza de las matemáticas y que se designó como «informes de resultados». Cada semana, los estudiantes por grupos debían redactar y entregar a la profesora un texto escrito en el que se recogían tanto los documentos aportados por la profesora como los resultados parciales del trabajo realizado en la sesión del taller, completado con sus comentarios personales y la información que, sobre el tema, hubieran podido recoger. Estos informes recogían por lo tanto las respuestas que cada grupo defendía y que aportaban al grupo clase al principio de cada sesión con vistas a un avance conjunto. Al final del taller, cada estudiante debía entregar su propio «informe final» que ya no recogía la crónica del proceso de estudio sino que se centraba en presentar y defender una respuesta final a la cuestión inicialmente planteada.

4.9. Los REI y el desarrollo sistemático de las técnicas matemáticas

Es muy habitual que la estructura didáctica binaria tradicional de la enseñanza universitaria, basada en dos dispositivos centrales, la «clase de teoría» y la «clase de problemas» (en la que generalmente las horas destinadas a la «clase de teoría» suelen superar sensiblemente a las de la «clase de problemas»), conduzca a los estudiantes a ver desfilar en el aula un gran número de praxeologías nuevas, que nunca se desarrollan en manos de los estudiantes, con las que deben familiarizarse y que deben aprender a dominar por sí solos, a partir del trabajo personal fuera del aula. En definitiva, el «mensaje» general que transmite la institución con los dispositivos didácticos que propone no incluye ningún indicio sobre la importancia efectiva del *trabajo de la técnica* para la creación de nuevos objetos matemáticos, ni induce a los alumnos a sentirse «expertos» en alguno de los numerosos nuevos ámbitos que se les «muestran».

En la década de los 90 se introdujo un nuevo dispositivo didáctico, los «talleres de prácticas matemáticas» (Bosch & Gascón, 1994) como complemento a esta organización didáctica binaria, con el objetivo de ofrecer un lugar en el que los estudiantes, con la ayuda de un profesor, pudieran llevar a cabo un *estudio profundizado* de un pequeño número de tipos de problemas con los que ya se habían familiarizado en la «clase de problemas». El análisis de su funcionamiento controlado permitió poner de manifiesto su capacidad de incidencia sobre los dispositivos didácticos existentes y sobre la vida del resto de las dimensiones del proceso de estudio. En particular, se evidenció su capacidad para integrar tres momentos didácticos que aparecen claramente desvinculados en la organización tradicional: el momento *exploratorio*, el *tecnológico-teórico* y el del *trabajo de la técnica*. De esta forma se mostró la posibilidad de construir praxeologías matemáticas locales progresivamente más completas (que requieren la integración funcional de todos los momentos del proceso de estudio), imprescindibles para el correcto desarrollo de la actividad de modelización matemática.

En el caso de la experimentación de los REI, y tal como ya mostró Esther Rodríguez en un trabajo anterior (Rodríguez, Bosch & Gascón, 2008), el hecho de basar la dinámica del estudio en la necesidad de aportar respuestas «fuertes» a cuestiones con gran poder generador, permite que el trabajo de la técnica surja como un medio necesario del proceso de estudio, ya sea como instrumento para construir respuestas «completas», ya sea como una manera de afianzarse en vistas a su uso posterior. Por ejemplo, cuando el estudio de las poblaciones con generaciones mezcladas en tiempo discreto condujo al estudio de la potencia enésima de una matriz y a la necesidad de diagonalizarla, la profesora del taller junto con el profesor responsable de la asignatura organizaron sesiones de ejercicios, estructuradas con la lógica similar al Taller de prácticas matemáticas, destinadas a trabajar la técnica de la diagonalización como preparación para la continuación del estudio. Del mismo modo, el trabajo de simulación (por ejemplo para estudiar el comportamiento de las sucesiones definidas por el modelo maltusiano y el logístico) también requiere la consideración de un gran número de casos y, por lo tanto, un trabajo técnico considerable difícil de evitar.

5. Prospectivas de la investigación

Es evidente que el estudio del papel de estos nuevos gestos y la creación de dispositivos apropiados para que dichos gestos puedan vivir en las instituciones escolares constituye un problema abierto de gran envergadura que no podemos más que dejar para estudios posteriores.

El problema de la enseñanza de las matemáticas como herramienta de modelización, en los diferentes niveles escolares (universidad, secundaria o primaria) y el problema correlativo de la introducción de dispositivos didácticos necesarios para sustentar la nueva organización didáctica modelizada por los recorridos de estudio e investigación, requiere hoy en día de grandes esfuerzos e investigación para pasar de su estadio experimental a una práctica generalizada. En el caso concreto de nuestro trabajo, se muestra cómo la formulación del problema didáctico y la manera de tratarlo están completamente generados por las herramientas teóricas y prácticas que proporciona la TAD. Pero el alcance de las restricciones y el tipo de cambios sociales, epistemológicos y pedagógicos necesarios para superar dichas restricciones parecen requerir grandes transformaciones tanto en la forma de entender qué son las matemáticas como en las herramientas conceptuales y prácticas potencialmente útiles para su enseñanza y aprendizaje. Esta es una gran aventura que seguro sobrepasa el ámbito de actuación de la TAD, y el ámbito de actuación de la didáctica de las matemáticas en general, requiriendo la cooperación de toda la comunidad escolar, incluyendo la participación de la comunidad matemática.

Agradecimientos

Trabajo realizado en el marco del proyecto EDU2008/02750EDUC del Ministerio de Ciencia e Innovación de España.

Referencias

Barquero, B. (2006). *Els recorreguts d'estudi i investigació (REI) i l'ensenyament de la modelització matemàtica en el primer curs universitari de Ciències* (Memoria de Diploma de Estudios Avanzados no publicada). Universitat Autònoma de Barcelona.

Barquero, B. (2009). *Ecología de la modelización matemática en la enseñanza universitaria de las matemáticas* (Tesis doctoral). Universitat Autònoma de Barcelona. http://hdl.handle.net/10803/3110

Barquero, B., Bosch, M. & Gascón, J. (2007). La modelización matemática como instrumento de articulación de las matemáticas del primer ciclo universitario de ciencias: Estudio de la dinámica de poblaciones. En L. Ruiz Higueras, A. Estepa & F. J. García (Eds.), *Matemáticas, escuela y sociedad. Aportaciones de la teoría antropológica de lo didáctico* (pp. 531-544). Jaén: Publicaciones de la Universidad de Jaén.

Barquero, B., Bosch, M. & Gascón, J. (2010). Ecología de la modelización matemática: Restricciones transpositivas en las instituciones universitarias. En A. Bronner, M. Larguier, M. Artaud, M. Bosch, Y. Chevallard, G. Cirade & C. Ladage (Eds.), *Diffuser les mathématiques (et les autres savoirs) comme outils de connaissance et d'action* (pp. 527-549). Montpellier, Francia: IUFM.

Bolea, P., Bosch, M. & Gascón, J. (2001). La transposición didáctica de organizaciones matemáticas en proceso de algebrización. *Recherches en didactique des mathématiques, 21* (3), 247-304.

Bosch, M. & Gascón, J. (2010). Fundamentación antropológica de las organizaciones didácticas: de los talleres de prácticas matemáticas a los recorridos de estudio e investigación. En A. Bronner, M. Larguier, M. Artaud, M. Bosch, Y. Chevallard, G. Cirade & C. Ladage (Eds.), *Diffuser les mathématiques (et les autres savoirs) comme outils de connaissance et d'action* (pp. 55-91). Montpellier, Francia: IUFM.

Bosch, M., Fonseca, C. & Gascón, J. (2004). Incompletitud de las organizaciones matemáticas locales en las instituciones escolares. *Recherches en didactique des mathématiques*, *24*(2-3), 205-250.

Chevallard, Y. (1999). L'analyse des pratiques enseignantes en théorie anthropologique du didactique. *Recherches en didactique des mathématiques, 19*(2), 221-266.

Chevallard, Y. (2004). Vers une didactique de la codisciplinarité. Notes sur une nouvelle épistémologie scolaire. *Journées de didactique comparée 2004*, Lyon, Francia.
http://yves.chevallard.free.fr/spip/spip/article.php3?id_article=45

Chevallard, Y. (2005). La place des mathématiques vivantes dans l'éducation secondaire: transposition didactique des mathématiques et nouvelle épistémologie scolaire. *La place des mathématiques vivantes dans l'éducation secondaire, APMEP,* 239-263.

Chevallard, Y. (2006). Steps towards a new epistemology in mathematics education. En M. Bosch (Ed.), *Proceedings of the 4th Congress of the European Society for Research in Mathematics Education* (pp. 21-30). Barcelona: FUNDEMI-IQS.

Chevallard, Y. (2009). La TAD face au professeur de mathématiques. Toulouse. *Séminaire DiDiST*, Toulouse, Francia, 29/04/2009.
http://yves.chevallard.free.fr/spip/spip/article.php3?id_article=162

Cirade, G. (2006). *Devenir professeur de mathématiques : entre problèmes de la profession et formation en IUFM. Les mathématiques comme problème professionnel* (Tesis doctoral). Université de Provence, Francia.
http://tel.archives-ouvertes.fr/tel-00120709/fr/

Gascón, J. (2001). Incidencia del modelo epistemológico de las matemáticas sobre las prácticas docentes. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa RELIME 4* (2), 129-159.

Koyré, A. (2000). *Estudios de historia del pensamiento científico*. México, DF: Siglo XXI editores (15ª edición).

Rodríguez, E., Bosch, M. & Gascón, J. (2008). A networking method to compare theories: metacognition in problem solving reformulated within the anthropological theory of the didactic. *ZDM The International Journal on Mathematics Education 40* (2), 287-301.