# Una posible “razón de ser” de la diagonalización de matrices en ciencias económicas y empresariales

Cecilio Fonseca
Departamento de Matemática Aplicada, Universidad de Vigo, España

**Abstract.** In the teaching of mathematics at university level, the “raison d’être” of taught mathematical contents is not always present. One of the main reasons is the absence of problematic questions that could motivate the construction of the mathematical organizations that are studied, especially if these questions arise from technical or practical needs. This paper presents a proposal of a local mathematical organization structuring the topic of “matrix diagonalization” around a unique type of problems that appears at the same time as its rationale and as the starting point of the study process.

**Résumé.** Dans l’enseignement universitaire des mathématiques, la « raison d’être » des contenus enseignés n’est pas toujours présente. Ceci est dû en grande partie à l’absence de questions problématiques qui motiveraient la construction des organisations mathématiques étudiées, spécialement si ces questions surgissent par des besoins techniques ou pratiques. Nous présentons ici une proposition d’organisation mathématique locale qui permet de structurer le thème de la diagonalisation de matrices autour d’un seul type de problèmes, qui apparaît alors comme sa « raison d’être » et qui est à la fois la question génératrice du processus d’étude.

**Resumen**. En la enseñanza universitaria de las matemáticas, la “razón de ser” de los contenidos enseñados no está siempre presente. Esto se debe en gran parte a la ausencia de cuestiones problemáticas que motiven la construcción de las organizaciones matemáticas estudiadas, especialmente si estas cuestiones surgen por necesidades técnicas o prácticas. Presentamos aquí una propuesta de organización matemática local que permite estructurar el tema de la diagonalización de matrices alrededor de un único tipo de problemas que es, a la vez, su “razón de ser” y la cuestión generatriz del proceso de estudio.

Bronner, A., Larguier, M., Artaud, M., Bosch, M., Chevallard, Y., Cirade, G. & Ladage, C. (Éds)
Diffuser les mathématiques (et les autres savoirs) comme outils de connaissance et d’action (pp. 595-614)
II[e] congrès international sur la TAD (Uzès, 31 oct.-3 nov. 2007)
Axe 3. *Théorie et pratique des AER et des PER*

## 1. El modelo teórico

Si denominamos "*razón de ser*" de una organización matemática (OM) a las cuestiones, inicialmente problemáticas, a las que dicha obra responde, entonces podemos decir que muchas de las OM que se proponen para ser estudiadas en la escuela han perdido su razón de ser, su sentido. El trabajo que se presenta aquí sitúa la "razón de ser" del tema clásico de la diagonalización de matrices dentro de un posible "recorrido de estudio e investigación" (Chevallard, 2006), articulado alrededor de una *organización matemática local relativamente completa* tal como se desarrolla en nuestro trabajo de tesis doctoral (Fonseca, 2004). El posible recorrido de estudio e investigación (REI) que estamos estudiando y experimentando, y que aquí presentamos de una forma muy resumida, viene caracterizado por los tres aspectos siguientes:

En primer lugar, se plantea el problema de determinar una "razón de ser" de la OM que se quiere estudiar (o enseñar) de tal forma que sea posible responder a una serie de cuestiones como: ¿Cuáles son las razones históricas que motivaron su estudio? ¿Cuáles son las situaciones problemáticas a las que responde la nueva OM que vamos a construir? ¿Qué situaciones problemáticas emergen que antes no era posible formular? ¿Qué problemas viene a resolver que no resuelva ninguna de las OM estudiadas anteriormente? En segundo lugar, el REI debe partir de una cuestión generatriz $Q$ lo suficientemente rica como para que provoque la aparición de una actividad matemática de complejidad creciente de forma que complete y amplíe las OM que van apareciendo como respuestas parciales a la cuestión inicial. Finalmente, el proceso de estudio que arranca con el objetivo de aportar respuestas a esta cuestión $Q$ debe poder provocar la construcción de una organización matemática local relativamente completa.

Nuestra presentación de este proceso de estudio tiene dos partes diferenciadas: una relativa al proceso de *construcción* de la propia OM que vendrá descrita en términos de los *momentos didácticos* que estructuran el proceso y otra relativa al propio *producto* que resulta y que, según nuestra hipótesis, debería ser una OMLRC en el sentido definido por Fonseca (2004). Es evidente que el proceso de construcción y el producto de esa construcción no se pueden separar. Es pues a partir de ambas facetas, proceso de construcción y producto, como podemos determinar el grado de completitud de la organización matemática local.

Recordemos aquí los distintos tipos de indicadores que vamos a considerar. Veamos en primer lugar, los aspectos relacionados con el proceso de estudio formulados en términos de los *momentos didácticos*:

**OD1.** Debe haber un *momento* del *primer encuentro* con un tipo de tareas matemáticas $T_q$ asociado a una cuestión matemática $q$ “con sentido”, que conduzca a alguna parte (que no sea una cuestión “muerta” en el sentido que introduce Yves Chevallard (2002).

**OD2.** El proceso de reconstrucción de una OML debe contener *momentos exploratorios* en los que la comunidad de estudio tenga la oportunidad de construir y empezar a utilizar una técnica inicial $\tau_0$ potencialmente útil para realizar las tareas del tipo $T_q$

**OD3.** La exploración de una OML debe desembocar en un verdadero *trabajo de la técnica* que se inicia rutinizando $\tau_0$ hasta provocar un *desarrollo progresivo de dicha técnica*. La técnica debe sufrir un desarrollo progresivo que permita generar técnicas nuevas, cada vez más potentes que nos permitan ir ampliando el campo de problemas.

**OD4.** En la reconstrucción de una OML deben aparecer *nuevas cuestiones matemáticas* relativas a las técnicas que se utilizan, esto es, cuestiones relativas a la interpretación, la justificación, y el alcance de dichas técnicas, así como a las relaciones que se establecen entre ellas (denominamos *cuestionamiento tecnológico* al conjunto de estas cuestiones). La respuesta a estas cuestiones requerirá la realización de nuevas tareas matemáticas que también pasarán a integrarse en la OML en construcción. Para llevar a cabo todo este conjunto de tareas matemáticas será necesario utilizar un *marco tecnológico-teórico* que es el que permitirá construir (además de justificar, interpretar y relacionar) todas las técnicas necesarias.

**OD5.** En el proceso de reconstrucción de una OML es necesario ir *institucionalizando* progresivamente (no de una vez por todas) aquellos elementos que deben ser considerados como “matemáticos” por la comunidad de estudio, para distinguirlos de los que han hecho, a lo largo del proceso, el papel de meros instrumentos auxiliares de la construcción.

**OD6**. Ligado a la institucionalización, también *es preciso evaluar la calidad de los componentes de la* OML *construida*: los tipos de tareas (¿están bien identificados?, ¿existen especímenes suficientemente variados de cada tipo?, ¿a qué cuestiones están asociados?, ¿están relacionados con el resto de la actividad de los estudiantes o bien están aislados?); las técnicas (¿están suficientemente trabajadas?, ¿son fiables?, ¿son económicas?, ¿son las más pertinentes para realizar las tareas presentadas?); y el discurso tecnológico (¿es suficientemente explícito?, ¿ayuda efectivamente a interpretar y justificar las técnicas?, ¿permite variar las técnicas en la dirección adecuada para construir nuevas técnicas? La posibilidad de *perturbar la situación inicial* para estudiar casos diferentes, nos permitirá trabajar con programas informáticos que aparecerán como un dispositivo indispensable en la *dialéctica de los media y los medio*, fundamental en este momento del proceso de estudio.

Si consideramos ahora el producto que resulta del recorrido de estudio e investigación, es decir la *respuesta* que la comunidad de estudio construye y aporta a la cuestión inicial *Q*, entonces debería ser posible "medir" el grado de completitud de la misma utilizando los siguientes indicadores tomados de C. Fonseca (2004):

**OML1.** Los tipos de tareas que conforman la OM están relacionados entre ellos y existen tareas relativas al cuestionamiento tecnológico dentro de la propia OM.

**OML2.** Se dispone de diferentes técnicas para cada tipo de tareas y es posible discernir criterios para elegir entre ellas.

**OML3.** Los ostensivos (palabras, expresiones, escrituras, notaciones, etc.) que constituyen la "materia prima" de los elementos de la OM son suficientemente ricos y variados como para permitir diferentes representaciones de la actividad matemática.

**OML4.** Existencia de tareas y de técnicas "inversas" en relación a los tipos de tareas inicialmente considerados (o "más estándares").

**OML5.** Posibilidad de interpretar el funcionamiento de las técnicas y su resultado en términos de los elementos tecnológico-teóricos de la OM.

**OML6.** Carácter poco estereotipado de los tipos de tareas de la OM y existencia de tareas matemáticas "abiertas".

**OML7.** Necesidad de construir técnicas nuevas capaces de ampliar los tipos de tareas inicialmente considerados.

Hay que subrayar que la noción de "completitud" es relativa. No tiene sentido hablar de OML "completas" ni de OML "incompletas". Se trata, en todos los casos, de una cuestión de grado: existen OML más o menos "completas" que otras en función del grado en que sus componentes cumplen las condiciones descritas por los indicadores OML1-OML7. Dualmente, el grado de completitud de una OML depende de la medida en que, a lo largo de su proceso de construcción, se cumplan OD1-OD6.

El estudio de las O*rganizaciones Matemáticas Locales Relativamente Completas,* posibilitan la conexión entre la Enseñanza de Secundaria y la Enseñanza Universitaria, niveles pocos estudiados desde la investigación experimental (Bosch, Fonseca & Gascón, 2004).

## 2. La organización matemática que se quiere construir

El *problema docente* que nos planteamos es el de construir una Organización Matemática (OM) que incorpore los elementos básicos del álgebra lineal tal como aparecen en el temario clásico de esta asignatura. Presentamos una propuesta de OM local que permite estructurar el tema de la *diagonalización de matrices* en torno a un único tipo de problemas que aparecerá así como la cuestión a la que dicha OM responde, esto es, como su "razón de ser", la cuestión a la que responde en sentido fuerte la OM construida (Barquero, Bosch & Gascón, 2007).

El proceso de construcción que presentamos nos permitirá, en primer lugar, profundizar en el estudio de los mecanismos que rigen la construcción y caracterización de la estructura de una OMLRC a través de la dinámica interna de los momentos del estudio (OD1-OD6) y de los indicadores (OML1-OML7) que caracterizan el grado de completitud de una OM local. En segundo lugar, el proceso de construcción de la OM local considerada, así como las principales técnicas matemáticas que la compongan, necesitará recurrir de manera no forzada al *programa informático Excel* para realizar los cálculos de manera eficaz y permitir así un *trabajo experimental* más rico que el entorno lápiz-papel-calculadora (OD6). Dado que el proceso de estudio se propuso a un grupo de estudiantes de Ciencias Económicas y Empresariales, es importante que los tipos de problemas que componen la OM estén vinculados de manera realista al *mundo empresarial* y retomen necesidades prácticas que allí aparecen. Como veremos, la construcción de la OM surgirá *como respuesta a uno de estos tipos de problemas* que se pueda formular inicialmente en términos no matemáticos. Dicho tipo de problemas constituirá la *situación generatriz* que será el motor del proceso de estudio. Señalemos finalmente que la introducción de las principales técnicas que componen la OM a estudiar se hará de manera *motivada*, es decir como respuesta a problemas que hayan surgido a lo largo del proceso de estudio.

Nos situamos pues en un curso trimestral de Álgebra Lineal para la asignatura de Matemáticas de primer curso de Ciencias Económicas y

Empresariales. El contenido del curso trimestral está organizado en los cuatro temas siguientes: (1) Cálculo matricial y sistemas de ecuaciones; (2) Espacios vectoriales. Bases y dimensión; (3) Aplicaciones lineales y expresión en distintas bases; (4) Diagonalización de matrices. Supondremos que los primeros tres temas ya han dado lugar al estudio de las respectivas OM locales -cuya descripción omitiremos aquí y que formarán parte del material matemático necesario- y que consideraremos disponible para nuestra construcción.

### 2.1. Razón de ser de la OM que se quiere construir

El estudio realizado en el diseño curricular de algunas universidades españolas (Barcelona, Madrid, Vigo, Sevilla, Zaragoza y Valencia) pone de manifiesto que, en la universidad, la ideología dominante es el *modelo popular* de las matemáticas *definición-especulación-teorema-prueba* tal como lo define Thurston (1994). No existen cuestiones problemáticas que constituyen la *razón de ser* de las nociones, propiedades, teoremas y técnicas que forman parte de los temas abordados en matemáticas.

Un segundo tipo de datos empíricos que utilizamos son una pequeña muestra de los libros de texto que desarrollan el temario correspondiente a la diagonalización de matrices: Apóstol (1989), De Burgos (1990) y Rojo (2007). El análisis de estos manuales confirma de nuevo lo que figura en los temarios respectivos, la "ideología" dominante es el modelo popular de las matemáticas.

Un tercer tipo de datos a tener en cuenta la *noosfera* que comprende a todas las personas que en la sociedad, piensan sobre los contenidos o métodos de enseñanza, influyendo por tanto de una manera directa o indirecta sobre ella. Señalaremos al respecto algunas investigaciones que hemos tenido en cuenta para desarrollar el tema que queremos estudiar:

– La Comisión Internacional para la Instrucción Matemática (ICMI), celebrada en Kuwait en 1986, propone en los currículos de matemáticas la inclusión de cuestiones relacionadas con las aplicaciones de las matemáticas, tanto a otras disciplinas como a la vida cotidiana.

– Educación Matemática Realista" (RME), constituye un subdominio de investigación dentro de la "modelización y las aplicaciones" especialmente relevante y con una gran difusión, tiene su origen en la idea de Freudenthal (1973) de las "matemáticas como una actividad humana", en lugar de las matemáticas como un sistema de conceptos ya construido.

– La Teoría de las Situaciones Didácticas (Brousseau, 1979), postula que dado un conocimiento matemático, existe una situación fundamental asociada a dicho conocimiento matemático, S(C), esto es, un conjunto mínimo de *situaciones a-didácticas* especificas de C, que permiten generar por manipulación de los valores que toman sus variables didácticas, un campo de problemas P(S(C)), que proporciona una representación óptima C' de C.

En lo que se refiere a la *legitimidad matemática y funcional* de la cuestión que proponemos estudiar podemos considerar que una posible motivación de la diagonalización de matrices se encuentra en el estudio de simplificación del cálculo de la potencia de una matriz. Además, la diagonalización es una herramienta importante en el campo intra-matemático (formas cuadráticas, ecuaciones diferenciales, estadística, etc.), pero también lo es en el campo extra-matemático (estudio de la contaminación, transporte entre ciudades, demanda turística, contagio e incubación de una enfermedad, estados de una población a largo plazo**,** etc.).

### 2.2. Situación generatriz

Nuestra situación generatriz forma parte de un sistema económico representado por una serie de trabajadores de una empresa que sufren cambios de sede con el paso de los años como consecuencia de una política de movilidad puesta en práctica por la propia empresa. El objetivo es analizar esa política de personal a lo largo de varios años. Si esta cuestión generatriz es lo suficientemente rica, provocarán nuevas situaciones problemáticas que generarán nuevos tipos de tareas y, nuevas técnicas asociadas, articulando una cadena de organizaciones matemáticas, cada vez más amplias y completas.

## 3. Descripción del proceso de estudio a través los distintos momentos

### 3.1. Momento del primer encuentro

El punto de partida de la construcción de nuestra OM, que podemos considerar como el momento del primer encuentro, y que hace referencia a la aparición de alguna de las cuestiones problemáticas que constituyen el tipo de problemas de partida, surge a partir de la siguiente cuestión:

Una empresa tiene tres sedes que denominamos por A, B y C. El director de recursos humanos ha adoptado una política de movilidad del personal sénior que consiste en cambiar cada año algunos trabajadores de sucursal, con la posibilidad de volver a la sucursal de origen en los años posteriores. En el año 2000 se aplicó la política siguiente.

| | Origen | | |
|---|---|---|---|
| Destino ↓ | A | B | C |
| A | 200 | 0 | 150 |
| B | 160 | 270 | 30 |
| C | 40 | 30 | 120 |
| TOTAL | 400 | 300 | 300 |

Aparecen las siguientes Situaciones Problemáticas

1. Si se aplica durante unos años seguidos la misma política, ¿cómo evolucionará la distribución de trabajadores sénior en cada sucursal?
2. ¿Qué política se debe aplicar si quiere que, a la larga, haya una determinada proporción $p_1$-$p_2$-$p_3$ de trabajadores sénior en cada sucursal?

La situación que planteamos es una situación abierta, es uno de los indicadores (OML6) que mide el grado de completitud de la organización matemática que queremos construir.

### 3.2. Momento exploratorio

Podemos comenzar por estudiar cuál es la distribución de los trabajadores en los dos años siguientes 2001 y 2002. La matriz inicial anterior depende de la composición anual de trabajadores en cada sucursal (400 en A, 300 en B y 300 en C). Para estudiar la *política de movilidad* del personal, podemos considerar que la *matriz de transición*, que indica el porcentaje de profesionales *sénior* de A, B y C que se mueven a A, B y C, se mantiene constante. En el caso anterior, la matriz de transición es la siguiente:

| Origen →<br>Destino ↓ | **A** | **B** | **C** |
|---|---|---|---|
| **A** | 0,50 | 0 | 0,50 |
| **B** | 0,40 | 0,90 | 0,10 |
| **C** | 0,10 | 0,10 | 0,40 |

Si llamamos $M$ a esta matriz $M = \begin{pmatrix} 0{,}5 & 0 & 0{,}5 \\ 0{,}4 & 0{,}9 & 0{,}1 \\ 0{,}1 & 0{,}1 & 0{,}4 \end{pmatrix}$ y $X_{2000}$ al vector que representa el total de trabajadores en cada sucursal en el año 2000, podemos utilizar la matriz de transición como una técnica, para ir conociendo las correspondientes distribuciones año tras año. Si partimos de una distribución inicial de 400 trabajadores en A, 300 en B y 300 en C, obtenemos la distribución de trabajadores al año siguiente mediante el producto matricial:

$$X_{2001} = M \times X_{2000} = \begin{pmatrix} 0{,}5 & 0 & 0{,}5 \\ 0{,}4 & 0{,}9 & 0{,}1 \\ 0{,}1 & 0{,}1 & 0{,}4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 400 \\ 300 \\ 300 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 350 \\ 460 \\ 190 \end{pmatrix}$$

Podemos interpretar (OML5) el resultado como sigue, la primera componente es $0{,}5 \times 400 + 0 \times 300 + 0{,}5 \times 300 = 350$ y tiene la siguiente traducción, de los 400 trabajadores que hay en la sucursal al principio del primer año: $0{,}5 \times 400 = 200$ se quedan en A, $0 \times 300 = 0$ ninguno se mueve de A a la sucursal B y $0{,}5 \times 300 = 150$ se van de la sucursal A a la sucursal C. De forma análoga se repetiría para las otras componentes.

Para hallar la distribución de los trabajadores en el año 2002 podemos utilizar la técnica matricial previamente utilizada:

$$X_{2002} = M \times X_{2001} = \begin{pmatrix} 0{,}5 & 0 & 0{,}5 \\ 0{,}4 & 0{,}9 & 0{,}1 \\ 0{,}1 & 0{,}1 & 0{,}4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 350 \\ 460 \\ 190 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 270 \\ 573 \\ 157 \end{pmatrix}$$

O bien una variación de esta técnica (OML2):

$$X_{2002} = M^2 \times X_{2000} = \begin{pmatrix} 0{,}5 & 0 & 0{,}5 \\ 0{,}4 & 0{,}9 & 0{,}1 \\ 0{,}1 & 0{,}1 & 0{,}4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0{,}5 & 0 & 0{,}5 \\ 0{,}4 & 0{,}9 & 0{,}1 \\ 0{,}1 & 0{,}1 & 0{,}4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 400 \\ 300 \\ 300 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 270 \\ 573 \\ 157 \end{pmatrix}$$

Esto se puede generalizar a $n$ periodos y obtener:

$$X_{2002} = M \cdot X_{2001} = M^2 \cdot X_{2000},\ X_{2003} = M \cdot X_{2002} = M^3 \cdot X_{2000}, \text{ etc.}$$

Podemos pues plantearnos como un primer tipo de tareas el estudio de la evolución de la trayectoria:

$$X_{2000+n} = M^n \cdot X_{2000}.$$

3.3. Momento del trabajo de la técnica

El estudio de este tipo de tareas puede realizarse de manera efectiva recurriendo a un programa informático (OD6) como, por ejemplo, la hoja de cálculo Excel. Se consiguen de este modo realizar un trabajo experimental suficientemente rico (probando una cantidad de casos concretos diversos) para poder formular hipótesis respecto a la trayectoria que se quiere estudiar. Comenzamos por estudiar el siguiente tipo de tareas $T$ y una técnica asociada, $\tau$:

$T$: Calcular en una hoja de Excel los productos sucesivos $M^n \cdot X_{2000}$ para distintos valores de $X_{2000}$ y distintas matrices $M$.

$\tau$: Calcular en una hoja de Excel los productos sucesivos $M^n \cdot X_{2000}$ para distintos valores de $X_{2000}$ y distintas matrices de $M$.

*Caso 1: Empresas con 1000 trabajadores*. Podemos plantearnos el estudio de la distribución de los trabajadores en un periodo determinado, por ejemplo, en el periodo 2001-2015. Presentamos a continuación una hoja de cálculo con las posibles respuestas:

| | **Origen** | | |
|---|---|---|---|
| **Destino** | **A** | **B** | **C** |
| **A** | 0,50 | 0,00 | 0,50 |
| **B** | 0,40 | 0,90 | 0,10 |
| **C** | 0,10 | 0,10 | 0,40 |

| 2000 | 2001 | 2002 | 2003 | 2004 | 2005 | 2006 | 2007 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 400 | 350 | 270 | 214 | 180 | 162 | 153 | 148 |
| 300 | 460 | 573 | 639 | 676 | 695 | 704 | 709 |
| 300 | 190 | 157 | 147 | 144 | 143 | *143* | *143* |
| $\Sigma = 1000$ | | | | | | | |

| 2008 | 2009 | 2010 | 2011 | 2012 | 2013 | 2014 | 2015 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 145 | 144 | *143* | *143* | *143* | *143* | *143* | *143* |
| 712 | 713 | *714* | *714* | *714* | *714* | *714* | *714* |
| 143 | 143 | *143* | *143* | *143* | *143* | *143* | *143* |

Una primera respuesta nos dice que la distribución de esos trabajadores en las tres sucursales tiende a estabilizarse con el paso de los años. Si queremos más información del sistema podemos hacer un primer cuestionamiento tecnológico (OML1):

– ¿Cuál es la distribución si tenemos un número de trabajadores fijos (1000) y cambiamos su situación inicial? (Primera modificación de la situación inicial)

– ¿Cuál es la distribución si cambiamos el número total de trabajadores de la empresa y mantenemos la misma política de movilidad? (Segunda modificación de la situación inicial)

– ¿Cuál es la distribución si en lugar de cambiar el número de trabajadores cambiamos la matriz de transición? (Tercera modificación de la situación inicial)

La primera modificación de la situación inicial puede ser estudiada por Excel:

| 2000 | 2001 | 2002 | 2003 | 2004 | 2005 | 2006 | 2007 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 300 | 250 | 205 | 177 | 160 | 152 | 147 | 145 |
| 500 | 590 | 647 | 679 | 696 | 705 | 710 | 712 |
| 200 | 160 | 148 | 144 | 143 | *143* | *143* | *143* |
| $\Sigma = 1000$ | | | | | | | |
| 2008 | 2009 | 2010 | 2011 | 2012 | 2013 | 2014 | 2015 |
| 144 | *143* | *143* | *143* | *143* | *143* | *143* | *143* |
| 713 | *714* | *714* | *714* | *714* | *714* | *714* | *714* |
| 143 | *143* | *143* | *143* | *143* | *143* | *143* | *143* |

Podemos afirmar que para cada matriz de transición $M$ y para cada distribución inicial $X_{2000}$ la trayectoria $X_{2000}$ tiende a un punto fijo. Si el número total de trabajadores es el mismo (1000 en cada uno de los casos), para cada *M* y para cada distribución inicial $X_{2000}$ obtenemos el mismo punto. Este nuevo recorrido amplía y completa la OM anteriormente considerada.

*Caso 2. Empresas con otras cantidades de trabajadores repartidos en las 3 sucursales*. La segunda modificación de la situación inicial produce la siguiente respuesta:

| 2000 | 2001 | 2002 | 2003 | 2004 | 2005 | 2006 | 2007 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 400 | 350 | 270 | 214 | 180 | 162 | 153 | 148 |
| 300 | 460 | 573 | 639 | 676 | 695 | 704 | 709 |
| 300 | 190 | 157 | 147 | 144 | 143 | *143* | *143* |
| Σ = 1000 | | | | | | | |
| 2008 | 2009 | 2010 | 2011 | 2012 | 2013 | 2014 | 2015 |
| 145 | 144 | *143* | *143* | *143* | *143* | *143* | *143* |
| 712 | 713 | *714* | *714* | *714* | *714* | *714* | *714* |
| 143 | 143 | *143* | *143* | *143* | *143* | *143* | *143* |

| 2000 | 2001 | 2002 | 2003 | 2004 | 2005 | 2006 | 2007 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 200 | 200 | 155 | 119 | 97 | 85 | 78 | 75 |
| 100 | 190 | 262 | 306 | 331 | 344 | 350 | 354 |
| 200 | 110 | 83 | 75 | 72 | 72 | 72 | 71 |
| Σ = 500 | | | | | | | |
| 2008 | 2009 | 2010 | 2011 | 2012 | 2013 | 2014 | 2015 |
| 73 | 72 | 72 | 72 | 72 | 71 | *71* | *71* |
| 355 | 356 | 357 | *357* | *357* | *357* | *357* | *357* |
| 71 | 71 | 71 | *71* | *71* | *71* | *71* | *71* |

Si cambiamos el número total de trabajadores (es decir la suma de componentes en $X_{2000}$) y mantenemos la misma matriz de transición entonces obtenemos puntos fijos distintos. En este caso el punto fijo depende de la distribución inicial $X_{2000}$. La respuesta obtenida de nuevo amplía y completa la anterior.

*Caso 3. Empresas con 1000 trabajadores y con distintas políticas de movilidad.* La tercera modificación de la situación inicial pasa por aceptar una nueva política de personal:

| | **Origen** | | |
|---|---|---|---|
| **Destino** | **A** | **B** | **C** |
| **A** | 0,20 | 0,60 | 0,20 |
| **B** | 0,60 | 0,30 | 0,10 |
| **C** | 0,20 | 0,10 | 0,70 |

Provoca la siguiente distribución:

| 2000 | 2001 | 2002 | 2003 | 2004 | 2005 | 2006 | 2007 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 400 | 320 | 344 | 333 | 335 | 334 | *334* | *333* |
| 300 | 360 | 332 | 338 | 334 | 334 | *334* | *334* |
| 300 | 320 | 324 | 329 | 331 | 332 | *332* | *333* |
| $\Sigma = 1000$ | | | | | | | |
| 2008 | 2009 | 2010 | 2011 | 2012 | 2013 | 2014 | 2015 |
| *333* | *333* | *333* | *333* | *333* | *333* | *333* | *333* |
| *333* | *333* | *333* | *333* | *333* | *333* | *333* | *333* |
| *333* | *333* | *333* | *333* | *333* | *333* | *333* | *333* |

Podemos afirmar que distintas políticas de movilidad producen números fijos distintos. El *trabajo de la técnica* desarrollado sugiere que, para cada distribución inicial $X_{2000}$ y cada política descrita a través de $M$, la distribución tiende siempre a una distribución fija $X$, aunque se necesiten según los casos distinto número de iterados. La distribución fija $X$ no depende de la distribución inicial $X_{2000}$ cuando fijamos el total de trabajadores de la empresa, pero sí de la matriz $M$. Surge así el siguiente tipo de problemas $T$ y una técnica $\tau$ asociada:

> $T$: ¿Cómo calcular directamente la distribución fija $X$ a la que parece tender la trayectoria $X_{2000+n}$ sin necesidad de aplicar muchas veces la matriz $M$?

$\tau$: Resolver con Excel ecuaciones matriciales concretas del tipo $M{\cdot}X = X$ reduciéndolas al estudio del sistema homogéneo asociado: $(M - I){\cdot}X = 0$.

**Determinación del punto fijo**

**MATRIZ M**

**Origen**

| **Destino** | **A** | **B** | **C** |
|---|---|---|---|
| **A** | 0,5 | 0 | 0,5 |
| **B** | 0,4 | 0,9 | 0,1 |
| **C** | 0,1 | 0,1 | 0,4 |

**MATRIZ I**

| | | |
|---|---|---|
| 1 | 0 | 0 |
| 0 | 1 | 0 |
| 0 | 0 | 1 |

**M - I =**

| | | |
|---|---|---|
| -0,5 | 0 | 0,5 |
| 0,4 | -0,1 | 0,1 |
| 0,1 | 0,1 | -0,6 |

**Det = 0,00** **Sistema Compatible Indeterminado**

**Menor singular:**

| | |
|---|---|
| -0,5 | 0 |
| 0,4 | -0,1 |

**Sistema equivalente:**

| | | · | | = | |
|---|---|---|---|---|---|
| -0,5 | 0 | | x | | -0,5 z |
| 0,4 | -0,1 | | y | | -0,1 z |

| | = | |
|---|---|---|
| x | | 1 z |
| y | | 5 z |

**Solución:**

| | |
|---|---|
| 1 | |
| 5 | z |
| 1 | |

Comprovación:

| | | | | | = | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 0,5 | 0 | 0,5 | | 1 | | 1 |
| 0,4 | 0,9 | 0,1 | | 5 | = | 5 |
| 0,1 | 0,1 | 0,4 | | 1 | | 1 |

Se observa que todas las ecuaciones matriciales resueltas conducen siempre a un sistema compatible indeterminado. La generalización, explicación y justificación de este resultado queda resumido en la siguiente proposición:

$\theta_1$. Como las columnas de $M$ suman 1 (matriz de transición), las columnas de $M - I$ suman 0 y $\det(M - I) = 0$.

Por lo tanto el sistema lineal $(M - I)X = 0$ siempre es *compatible indeterminado* con una infinidad de soluciones, además de la solución trivial $X = 0$. Luego toda trayectoria $X_{2000+n}$ tiene una infinidad de puntos fijos posibles.

## 3.4. Momento Tecnológico-Teórico

El estudio del trabajo de la técnica nos ha permitido formular la conjetura siguiente: para cada $M$ y para cada distribución inicial $X_{2000}$, la trayectoria $X_{2000+n}$ tiende a un punto fijo $X$. Hemos visto también que la infinidad de puntos fijos solución de $X = M{\cdot}X$ depende sólo de $M$, y no de $X_{2000}$. Pero el hecho de que una trayectoria concreta tienda a un punto fijo concreto sí podría depender de la distribución inicial $X_{2000}$. Sin embargo el trabajo exploratorio parecía indicar que el punto fijo no dependía de $X_{2000}$ sino de la suma de componentes de $X_{2000}$ (número total de trabajadores de la empresa). Un segundo cuestionamiento tecnológico provoca la aparición de nuevas cuestiones problemáticas:

¿Cómo es la relación de dependencia entre el punto fijo $X$, $M$ y $X_{2000}$?

¿Nos permitirá determinar el punto fijo $X$, si existe, a partir de $M$ y de $X_{2000}$?

Una manera de intentar superar la relación de dependencia que tiene $X$ con $M$ y $X_{2000}$ consiste en estudiar la sucesión $\{M^n\}$, “neutralizando” la variable $X_{2000}$. Esto nos conduce al estudio de un nuevo tipo de tareas: el estudio de la sucesión $\{M^n\}$. Describiremos ahora con mayor brevedad las etapas siguientes del proceso. Utilizaremos de nuevo Excel para calcular las potencias sucesivas de la matriz $M$:

$M^1$

| | | |
|---|---|---|
| 0,22 | 0,09 | 0,34 |
| 0,65 | 0,77 | 0,50 |
| 0,14 | 0,14 | 0,17 |

$M^2$

| | | |
|---|---|---|
| 0,18 | 0,11 | 0,25 |
| 0,68 | 0,74 | 0,60 |
| 0,14 | 0,14 | 0,15 |

$M^3$

| | | |
|---|---|---|
| 0,16 | 0,13 | 0,20 |
| 0,70 | 0,73 | 0,65 |
| 0,14 | 0,14 | 0,14 |

$M^4$

| | | |
|---|---|---|
| 0,15 | 0,14 | 0,17 |
| 0,71 | 0,72 | 0,68 |
| 0,14 | 0,14 | 0,14 |

$M^5$

| | | |
|---|---|---|
| 0,15 | 0,14 | 0,16 |
| 0,71 | 0,72 | 0,70 |
| 0,14 | 0,14 | 0,14 |

$M^6$

| | | |
|---|---|---|
| 0,14 | 0,14 | 0,15 |
| 0,71 | 0,72 | 0,71 |
| 0,14 | 0,14 | 0,14 |

$M^7$

| | | |
|---|---|---|
| 0,14 | 0,14 | 0,15 |
| 0,71 | 0,72 | 0,71 |
| 0,14 | 0,14 | 0,14 |

$M^8$

| | | |
|---|---|---|
| 0,14 | 0,14 | 0,14 |
| 0,71 | 0,71 | 0,71 |
| 0,14 | 0,14 | 0,14 |

En esta primera parte del recorrido, el alumno relaciona tareas de multiplicación de matrices ya conocidas que le permiten construir conocimientos del sistema que queremos modelizar. La necesidad de ampliar y completar el conocimiento del sistema propuesto, da lugar a una segunda parte, en la que la técnica de calcular la potencia de una matriz cuando el exponente es grande, tiene un coste enorme para resolver las tareas propuestas y, la necesidad de disminuir este coste y ganar al mismo tiempo en rigor, provoca la aparición de la diagonalización de matrices.

Aunque sólo mostramos aquí el cálculo de las potencias sucesivas de una matriz de transición, el caso general de una matriz $M$ cualquiera muestra que hay una expresión simple para calcular directamente $M^n$ si $M$ es diagonal[1]. Podemos entonces plantearnos el caso de las *matrices diagonalizables*:

> $\theta_1$. Si $D$ es una matriz diagonal, entonces $D^n$ es la matriz diagonal que se obtienen elevando a $n$ los valores de la diagonal de $D$.

La utilización de este resultado tecnológico requiere la movilización de una OM más amplia sobre la diagonalización de matrices. Una vez *motivada* esta OM, su construcción o retoma dependerá, evidentemente, del trabajo realizado previamente en la OM regional del álgebra lineal en la que nos situamos: espacios vectoriales, cambios de base, aplicaciones lineales, etc. Se pueden haber visto, por ejemplo, algunos casos de cambios de base en los que la matriz resultante es diagonal y haber analizado qué propiedades cumplen los vectores de la nueva base (vectores propios). De este modo se puede obtener un segundo resultado tecnológico que ya es "productor" de una nueva técnica:

> $\theta_2$. Si $M$ es una matriz diagonalizable, entonces $M^n = K{\cdot}D^n{\cdot}K$ donde $D$ es la matriz diagonal asociada y $K$ la matriz cambio de base de la base de vectores propios.

El problema del cálculo de la potencia de una matriz puede ahora ser resuelto en el caso general: Determinar la matriz diagonal $D$ tal que $M = K{\cdot}D{\cdot}K^{-1}$ y hallar $M^n = K{\cdot}D^n{\cdot}K$.

**Diagonalización y cálculo de M^n**

**Dada una matriz M cualquiera, calcularemos la expresión general de M^n previa diagonalización**
**Sólo consideraremos el caso en que M diagonalice**

$$M = \begin{pmatrix} 0,5 & 0 & 0,5 \\ 0,4 & 0,9 & 0,1 \\ 0,1 & 0,1 & 0,4 \end{pmatrix} \qquad I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

**1. Determinación de los valores propios**

$$\det \begin{vmatrix} 0,5-\lambda & 0 & 0,5 \\ 0,4 & 0,9-\lambda & 0,1 \\ 0,1 & 0,1 & 0,4-\lambda \end{vmatrix} = -\lambda^3 + 1,8\lambda^2 - 0,95\lambda + 0,15 = 0$$

Resolemos la ecuación y hallamos:

| | | |
|---|---|---|
| $\lambda_1 = 1$ | $\lambda_2 = 0,5$ | $\lambda_3 = 0,3$ |

1. Por razones de simplicidad, omitiremos aquí el caso de las matrices triangulares. Nos reduciremos por lo tanto a las matrices $M$ diagonalizables. El estudio se debería extender posteriormente a matrices cualesquiera considerando la matriz de Jordan asociada a $M$ en lugar de la matriz diagonal.

**2. Determinación de los vectores propios**

$\lambda_1$ **= 1**

| | v | M·X | Matriz del sistema | | | Rango = 2 | | | Solución: | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | 1 | 1 | -0,5 | 0 | 0,5 | -2 | 0 | -0,5 | 1 | x |
| $v_1$ = | 5 | 5 | 0,4 | -0,1 | 0,1 | -8 | -10 | -0,1 | 5 | y |
| | 1 | 1 | 0,1 | 0,1 | -0,6 | | | | | |

$\lambda_2$ = **0,5**

| | | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | 1 | 0,5 | 0 | 0 | 0,5 | -0,5 | 2,5 | 0 | -1 | y |
| $v_2$ = | -1 | -0,5 | 0,4 | 0,4 | 0,1 | 2 | 0 | -0,4 | 0 | z |
| | 0 | 0,0 | 0,1 | 0,1 | -0,1 | | | | | |

$\lambda_3$ = **0,3**

| | | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | -5 | -1,5 | 0,2 | 0 | 0,5 | 5 | 0 | -0,5 | -2,5 | x |
| $v_3$ = | 3 | 0,9 | 0,4 | 0,6 | 0,1 | -3,33 | 1,67 | -0,1 | 1,5 | y |
| | 2 | 0,6 | 0,1 | 0,1 | 0,1 | | | | | |

**3. Matriz cambio de base y matriz diagonal**

| | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | 1 | 1 | -5 | | 1 | 0 | 0 |
| **K =** | 5 | -1 | 3 | **D =** | 0 | 0,5 | 0 |
| | 1 | 0 | 2 | | 0 | 0 | 0,3 |

Comprovamos: **$K^*D^*K^{-1}$ = M**

| | | | | | | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 1 | -5 | | 1 | 0 | 0 | | 0,143 | 0,14 | 0,14 | | 0,5 | 0 | 0,5 |
| 5 | -1 | 3 | * | 0 | 0,5 | 0 | * | 0,5 | -0,5 | 2 | = | 0,4 | 0,9 | 0,1 |
| 1 | 0 | 2 | | 0 | 0 | 0,3 | | -0,07 | -0,07 | 0,43 | | 0,1 | 0,1 | 0,4 |

**4. Cálculo de M^n**

Tenemos $M^n=(K^*D^*K^{-1})^n=K^*D^{n*}K^{-1}$

| | | | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | | | | | | | n | | | | |
| | 1 | 1 | -5 | | 1 | 0 | 0 | | 0,143 | 0,14 | 0,14 |
| $M^n$ = | 5 | -1 | 3 | * | 0 | 0,5 | 0 | * | 0,5 | -0,5 | 2 |
| | 1 | 0 | 2 | | 0 | 0 | 0,3 | | -0,07 | -0,07 | 0,43 |
| | 1 | 1 | -5 | | 1 | 0 | 0 | | 0,143 | 0,14 | 0,14 |
| = | 5 | -1 | 3 | * | 0 | $0,5^n$ | 0 | * | 0,5 | -0,5 | 2 |
| | 1 | 0 | 2 | | 0 | 0 | $0,3^n$ | | -0,07 | -0,07 | 0,43 |

**5. Cálculo de M^n para valores grandes de n**

| | | | | | | | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | 1 | 1 | -5 | | 1 | 0 | 0 | | 0,1 | 0,1 | 0,1 | | 0,14 | 0,14 | 0,14 |
| $M^n$ = | 5 | -1 | 3 | * | 0 | 0 | 0 | * | 0,5 | -1 | 2 | = | 0,71 | 0,71 | 0,71 |
| | 1 | 0 | 2 | | 0 | 0 | 0 | | -0 | -0 | 0,4 | | 0,14 | 0,14 | 0,14 |

Valor exacto:

| | | | |
|---|---|---|---|
| | **2** | **2** | **2** |
| **$M^n$ = 1/14 ·** | **10** | **10** | **10** |
| | **2** | **2** | **2** |

Finalmente, cabe retomar el problema inicial para demostrar la existencia del punto fijo en el caso particular de las matrices de transición:

$\theta_3$. (a) Si $M$ es una matriz de transición, entonces siempre tiene un vector propio de valor propio 1 (vector fijo).

(b) Los demás valores propios de $M$ tendrán necesariamente parte real < 1.

(c) Si M diagonaliza, entonces para valores grandes de $n$ se tiene que:

$$D^n \approx \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

(d) Por lo tanto,

$$M^n = KD^nK^{-1} = \begin{pmatrix} k_1 & k_1 & k_1 \\ k_2 & k_2 & k_2 \\ k_3 & k_3 & k_3 \end{pmatrix}$$

con $(k_1, k_2, k_3)$ primer vector de la base de vectores propios (punto fijo de $M$).

Falta por completar en este trabajo el estudio del *momento de institucionalización* y de la evaluación, fase que estamos desarrollando actualmente.

## 4. Alcance de la organización matemática local construida

La técnica es aplicable a cualquier situación modelizable por una matriz input-output, en la que se produzcan intercambios entre distintas entidades: transportes entre ciudades, intercambios de productos (matrices de Leontief), etc. El intercambio también puede ser temporal, por ejemplo entre distintos estados de los individuos de una población: jóvenes, adultos y viejos o puede interpretarse como el contagio, incubación, manifestación de una enfermedad, si nos mantenemos en $R^3$, o a alzas y bajas de valores en bolsa en el caso de $R^2$.

## 5. Algunas conclusiones provisionales

El recorrido que hicimos está ligado a una institución concreta (ciencias económicas y empresariales). Podía ser diferente en otra institución, y por lo tanto puede aparecer otra "razón de ser" distinta. La "razón de ser" de una OM no es única, siempre es relativa a la institución de referencia.

La razón de ser, tal como se conceptualiza en el ámbito de la TAD, provoca un cambio en todo el proceso de estudio. Al incluir las cuestiones que dan sentido al estudio de una OM en el corazón del programa de estudio de dicha OM se modifica profundamente la práctica matemática, los tipos de problemas, las técnicas y hasta el discurso tecnológico-teórico asociado.

En el trabajo hay dos partes diferenciadas, una parte teórica (donde el momento central es el tecnológico-teórico) y otra empírica, representada por el programa Excel que facilita el trabajo exploratorio y técnico que nos permite ir hallando regularidades.

El recorrido descrito puede extenderse a otras situaciones problemáticas con la condición de tomar en consideración la relatividad institucional de las cuestiones que lo generan. [2]

**Referencias**

Apóstol, T. M. (1989). *Calculus* (Vols. I y II). Barcelona, España: Reverté.

Barquero, B., Bosch, M. & Gascón, J. (2007). La modelización matemática como instrumento de articulación de las matemáticas del primer ciclo universitario de ciencias: Estudio de la dinámica de poblaciones. En L. Ruiz-Higueras, A. Estepa & F. J. García (Eds.), *Matemáticas, escuela y sociedad. Aportaciones de la teoría antropológica de lo didáctico* (pp. 573-594). Jaén, España: Publicaciones de la Universidad de Jaén.

Bosch, M., Fonseca, C. & Gascón, J. (2004). Incompletitud de las organizaciones matemáticas locales en las instituciones escolares. *Recherches en didactique des mathématiques*, *24*(2-3), 205-250.

Brousseau, G. (1979). *Étude de situations (Théorie des situations didactiques)*. Burdeos: IREM de Bordeaux.

Chevallard, Y. (2006). Steps towards a new epistemology in mathematics education. En M. Bosch (Ed.), *Proceedings of the IV$^{th}$ Congress of the European Society for Research in Mathematics Education* (pp. 21-30). Barcelona, España: Universidad Ramon Llull.

Chevallard, Y. (2002). Organiser l’étude. Écologie & régulation. En J.-L. Dorier, M. Artaud, M. Artigue, R. Berthelot & R. Floris (Eds.), *Actes de la XI$^{e}$ école d’été de didactique des mathématiques* (pp. 41-56). Grenoble: La Pensée sauvage.

De Burgos, J. (1990). *Curso de Algebra y Geometría*. Madrid: Alhambra.

2. Trabajo realizado en el marco del proyecto de investigación EDU2008-02750/EDUC del Ministerio de Ciencia e Innovación de España.

Fonseca, C. (2004). *Discontinuidades matemáticas y didácticas entre la secundaria y la universidad* (Tesis doctoral). Universidad de Vigo, España.

Freudenthal, H. (1973). *Mathematics as an educational task*. Dordrecht, Países Bajos: Reidel.

Rojo, J. (2007). *Álgebra Lineal*. Madrid: McGraw-Hill.

Thurston, W. (1994). On proof and progress in mathematics. *Bulletin of the American Mathematical Society, 30*(2), 61-177.