Diseño de un modelo epistemológico de referencia para introducir los números negativos en un entorno algebraico

Eva Cid y Pilar Bolea
Universidad de Zaragoza, España

Abstract. The introduction of negative numbers at school is usually done in an arithmetic environment and is based on specific "concrete models". However, several investigations question the didactic appropriateness of this type of introduction. In this paper we justify the necessity of introducing negative numbers in an algebraic environment and make a first approach to an epistemological reference model to be used for a later design of "study and research activities" of negative numbers within an algebraic context.

Résumé. L'introduction scolaire des nombres négatifs se fait habituellement dans un environnement arithmétique et s'appuie sur la présentation de modèles concrets. Cependant, plusieurs recherches mettent en doute la pertinence didactique d'une telle introduction. Dans cet article, nous justifions la nécessité d'introduire les nombres négatifs dans un environnement algébrique et nous réalisons une première approche d'un modèle épistémologique de référence que puisse être la base du dessin d'« activités d'étude et recherche » relatives aux nombres négatifs dans un contexte algébrique.

Resumen. La introducción escolar de los números negativos se hace habitualmente en un entorno aritmético apoyándose en la presentación de modelos concretos. Varias investigaciones cuestionan la pertinencia didáctica de este tipo de introducción. En este artículo justificamos la necesidad de introducir los números negativos en un entorno algebraico y realizamos una primera aproximación a un modelo epistemológico de referencia que pueda sustentar el diseño de "actividades de estudio e investigación" relativas a los números negativos en un contexto algebraico.

Bronner, A., Larguier, M., Artaud, M., Bosch, M., Chevallard, Y., Cirade, G. & Ladage, C. (Éds)
Diffuser les mathématiques (et les autres savoirs) comme outils de connaissance et d'action (pp. 575-594)
II[e] congrès international sur la TAD (Uzès, 31 oct.-3 nov. 2007)
Axe 3. *Théorie et pratique des AER et des PER*

1. La introducción escolar de los números negativos

En el sistema educativo español los números negativos se introducen en el primer curso de la Educación Secundaria Obligatoria (ESO; alumnos de 12 a 13 años), aunque algunas líneas editoriales retrasan su introducción a segundo de ESO o la adelantan al último curso de Educación Primaria. Esta introducción se realiza en un entorno aritmético, dado que en ese momento todavía no se ha comenzado la enseñanza del álgebra, y se circunscribe inicialmente a los números enteros, procediendo en cursos posteriores a la simetrización aditiva del conjunto de los números racionales positivos y, más tarde, de los reales positivos.

Siguiendo las pautas de justificación propias de la aritmética escolar, se recurre a una supuesta familiarización de los alumnos con ciertos "modelos concretos" (deudas y haberes o pérdidas y ganancias, juegos con puntuaciones positivas o negativas, personas que entran o salen de un recinto o que recorren un camino con dos sentidos, temperaturas, altitudes por encima o debajo del nivel del mar, etc.) que actúan por analogía, es decir, el comportamiento del modelo concreto "se parece" al de los números enteros y, por eso, su conocimiento permite deducir las propiedades de dichos números. Para ello, se interpretan los objetos del modelo concreto como "magnitudes opuestas o relativas" y se postula que es necesario expresar la medida de esas cantidades de magnitud con un número natural precedido del signo "+" o del signo "–", lo que justifica la consideración de número que se le adjudica a este nuevo objeto matemático. A continuación, se presenta la estructura ordinal, aditiva y multiplicativa de los números enteros ligada a determinadas acciones físicas realizadas sobre las cantidades de magnitud y a sus consecuencias. En bastantes manuales, los modelos concretos sirven de introducción al modelo matemático de la recta numérica y, finalmente, son las posiciones en la recta y los desplazamientos a derecha e izquierda los que justifican las reglas de los signos. Una vez que los alumnos se han familiarizado con estas reglas, se inicia el estudio del álgebra.

Esta forma de hacer supone una inversión del proceso habitual de modelización matemática, en el que el modelo matemático es un medio para obtener información sobre un sistema intra o extramatemático que se constituye en objeto de estudio. En la aritmética escolar el objeto de estudio es el objeto matemático que se pretende enseñar, en este caso el número entero, y el medio para estudiarlo son ciertos sistemas constituidos por objetos pertenecientes al mundo sensible y las acciones que se ejercen sobre ellos, es decir, los modelos concretos. Sólo cuando se considera completada la introducción del objeto matemático, recupera éste parcialmente su función como modelo matemático de un sistema y se presentan a los alumnos sus "aplicaciones".

2. La investigación sobre los modelos concretos

Las propuestas de enseñanza que provienen del campo de la investigación didáctica o de la innovación educativa siguen básicamente el mismo esquema que plantea la escuela: introducción de los números positivos y negativos a través del número entero[1] y en un entorno aritmético, justificando la necesidad y significado de esta nueva noción mediante uno o varios modelos concretos. La proliferación de nuevos modelos concretos, consecuencia de estos trabajos, hizo necesaria una clasificación de los mismos (Janvier, 1983; Cid, 2002) en modelos de neutralización y de desplazamiento. En un modelo de neutralización los números enteros expresan medidas de cantidades de magnitud que pueden tener el mismo sentido o sentidos opuestos y los signos predicativos indican el sentido de la cantidad de magnitud, mientras que los signos operativos binarios y unarios se relacionan con las acciones de añadir, quitar, reunir o separar. En cambio, en un modelo de desplazamiento los números enteros expresan desplazamientos o posiciones; los signos predicativos, el sentido del desplazamiento o la situación de la posición a uno u otro lado de la posición origen; los signos operativos binarios, la composición de desplazamientos o aplicación de un desplazamiento a una posición para obtener otra posición; y los unarios, mantenimiento o cambio del sentido de desplazamiento.

Sin embargo, a pesar de la casi unanimidad existente sobre el uso de modelos concretos, algunos autores han planteado dudas o críticas a su funcionamiento didáctico. Para empezar, el interés del modelo se basa en la supuesta familiaridad de los alumnos con él, lo que se espera que facilite la comprensión del número entero y sus operaciones y la deducción de sus reglas de cálculo. Por ejemplo, se supone que la familiaridad con el modelo de deudas y haberes es lo que permite deducir que $(-7) + (+5) = -2$, porque "si juntamos una deuda de 7 euros y un haber de 5 euros, eso equivale a una deuda de 2 euros". Pero diversos autores (por ejemplo, Bell, 1982, 1986;

1. Bruno (1997) es uno de los pocos autores que proponen que se simetrice aditivamente el conjunto numérico manejado hasta ese momento por los alumnos, es decir, el conjunto de los números racionales positivos y sus raíces reales.

Liebeck, 1990; Bruno y Martinón, 1994; Gallardo, 1994; Lytle, 1994; Mukhopadhyay, 1997, entre otros) han puesto de manifiesto que los alumnos tienen dificultades para entender y manejar los modelos concretos, con lo que una herramienta didáctica pensada para ayudarles a dar sentido a la noción matemática se convierte en una fuente añadida de problemas. Ante esta situación, algunos investigadores (Bruno y Martinón, 1994; González Marí, 1995, entre otros) proponen la utilización de las clasificaciones de los problemas aditivos de una etapa como medio para construir situaciones muy variadas que ayuden a los alumnos a familiarizarse previamente con el funcionamiento de los modelos.

Otras investigaciones permiten poner en duda la pertinencia del uso de modelos concretos para introducir el número entero. Ya González Marí (1995) hace notar que el orden inducido por los modelos concretos no reproduce el orden de los números enteros. Por otro lado, Cid (2002) considera que los modelos concretos no reflejan la estructura de cuerpo conmutativo totalmente ordenado que caracteriza a los números reales (o, más en particular, la de anillo totalmente ordenado conmutativo y con unidad de los números enteros), sino la de espacio vectorial unidimensional, en el caso de los modelos de neutralización, o la de espacio afín unidimensional, en el caso de los modelos de desplazamiento. Y, aunque todas ellas son equivalentes, poner de manifiesto la estructura de espacio vectorial de los números reales no es precisamente la mejor manera de introducir el orden total compatible con las operaciones propias de un cuerpo totalmente ordenado; tampoco lo es presentar la suma de un espacio afín o el producto escalar de un espacio vectorial para justificar las operaciones internas de un cuerpo.

Como consecuencia, la utilización del modelo por parte de los alumnos para deducir las propiedades del número entero y de sus operaciones puede fomentar la aparición de creencias erróneas. Por ejemplo, el modelo de deudas y haberes puede facilitar que los niños decidan que -7 es mayor que -2 porque "una deuda de 7 euros es mayor que una de 2 euros", o que concluyan que $(-7)(-2) = -14$ porque "el resultado de multiplicar una deuda por otra deuda no puede ser un haber"; o bien, el modelo de las temperaturas puede facilitar que $(-7) - (-2) = +5$, porque "la diferencia entre esas dos temperaturas es de 5 grados".

3. La investigación sobre la epistemología de los números negativos

La epistemología de los números negativos nos muestra que su razón de ser no proviene de unas supuestas magnitudes opuestas o relativas definidas en el ámbito de la aritmética, sino del ámbito del álgebra, hecho que ya fue reseñado en su momento por Chevallard (1988, 1990). La razón por la cual Diofanto se ve precisado a enunciar la regla de los signos tiene que ver con las peculiaridades del cálculo algebraico. En aritmética toda operación correctamente planteada puede efectuarse, cosa que no sucede en álgebra desde el momento en que intervienen cantidades desconocidas. Esto tiene como consecuencia que los términos de las operaciones no son sólo números, como sucede en aritmética, sino también operaciones indicadas. Por ejemplo, la gestión de la expresión algebraica $(a - 5) - (b - 3)$ exige conocer las propiedades de las diferencias de diferencias. Es decir, el cálculo algebraico obliga a definir y manejar operaciones entre operaciones lo que conduce rápidamente, por razones de economía de justificación, a la gestión de las operaciones entre sumandos y sustraendos. Además, la descontextualización propia de dicho cálculo impone una sintaxis exhaustiva y minuciosa que tenga en cuenta todos los aspectos formales.

Esto plantea dudas respecto a la oportunidad de introducir los números negativos en el ámbito aritmético. La resolución aritmética de un problema se caracteriza por ser un procedimiento fuertemente contextualizado y en el que todas las operaciones que se proponen son efectuables. En todo momento se trabaja con números a los que se atribuye un significado como medidas y las decisiones sobre la secuencia de operaciones aritméticas que resuelve el problema se toma en función de esos significados, lo que hace innecesario simbolizar algebraicamente el "sentido" de las cantidades de magnitud. Los problemas que se presentan a los alumnos para justificar la necesidad de usar los números negativos suelen tener una resolución perfectamente válida en el campo de los números positivos, incluso mucho más sencilla. La razón de ser de los números con signo no puede encontrarse en un ámbito, como el aritmético, donde la permanente contextualización numérica y la fragmentación de la secuencia de operaciones a realizar hacen innecesario todo simbolismo más allá de la representación numérica y de sus algoritmos de cálculo.

Por otro lado, el que se definan reglas de cálculo para sumandos y sustraendos no significa que estos objetos tengan que ser considerados números. Desde la época de Diofanto hasta principios del siglo XIX, la comunidad matemática no tuvo inconveniente en aceptar los sustraendos como elementos intermedios de cálculo, pero sí tuvo grandes dificultades para asumirlos como soluciones de las ecuaciones, a pesar de que el desarrollo de la teoría de ecuaciones algebraicas y, más adelante, la geometría analítica, hicieron casi indispensable su aceptación. Estos hechos han llevado a diversos autores (Glaeser, 1981; Brousseau; 1983; Schubring, 1986; Cid, 2000, entre otros) a plantearse que la concepción del número como medida, propia de la matemática anterior al siglo XIX, fue un obstáculo epistemológico que impidió durante muchos siglos la consideración como números de los sumandos y sustraendos. Es decir, fue la creencia en que el concepto de número tiene su fundamento en la medida de las cantidades de magnitud y, por consiguiente, un objeto matemático sólo puede adquirir el estatuto de número si admite una interpretación en términos de medida, la que, al parecer, obstaculizó históricamente la aceptación de los números negativos.

En este proceso histórico parece posible delimitar dos etapas (Brousseau, 1983; Cid, 2000): en una primera etapa, la imposibilidad de dar una interpretación de los sustraendos como medidas impidió que pudiesen ser considerados números; en una segunda etapa, la consideración de las magnitudes opuestas y relativas permitió interpretar los sustraendos como medidas, lo que favoreció su aceptación como números, pero obstaculizó la justificación de su estructura multiplicativa y ordinal.

4. Razones para la elección de un entorno algebraico

En los epígrafes anteriores hemos puesto de manifiesto las razones que nos hacen pensar que la introducción y justificación de los números negativos por medio de modelos concretos y en el seno de la aritmética puede producir efectos no deseados e, incluso, obstaculizar una buena comprensión de dichos números. Resumiendo, son las siguientes:

– La aritmética no es un buen lugar para iniciar la enseñanza de los números negativos pues la permanente contextualización numérica propia de este ámbito no permite justificar de una manera creíble la razón de ser de estos objetos.

– La introducción escolar actual fomenta la concepción de que el número sólo puede entenderse como resultado de una medida, lo que parece ser un obstáculo epistemológico que la comunidad de matemáticos tuvo que salvar para poder aceptar plenamente los números positivo y negativos y justificar su estructura.

– Los modelos concretos pueden contribuir a que los alumnos adquieran creencias erróneas sobre los números negativos y sus operaciones porque enfatizan las estructuras de espacio vectorial y espacio afín, en lugar de la estructura de cuerpo totalmente ordenado (o anillo totalmente ordenado). Precisamente, lo que se promueve a través de los modelos concretos es esa concepción del número negativo como medida de magnitudes opuestas o relativas que históricamente parece haber supuesto un obstáculo para la justificación de parte de su estructura algebraica.

– La familiaridad de los alumnos con los modelos concretos no parece ser tal, por lo que su presentación puede resultar una dificultad añadida, antes que una ayuda para el aprendizaje de los números negativos.

A todo esto, habría que añadir las conclusiones obtenidas en distintas investigaciones sobre los errores que se producen en la gestión del cálculo algebraico. En ellas se ponen de manifiesto las dificultades de los alumnos para aceptar las soluciones negativas de las ecuaciones y el aumento de los errores de cálculo cuando no es posible interpretar una expresión algebraica en términos de operaciones entre números naturales o racionales positivos (Gallardo, 2002; Vlassis, 2004).

Creemos, por tanto, que hay que empezar a explorar las posibilidades didácticas de una introducción de los números negativos en un entorno algebraico y a contrastar sus efectos con los de la enseñanza a partir de modelos concretos. Para ello, será necesario construir un modelo epistemológico de referencia que sirva de base para el diseño de una secuencia de actividades de estudio e investigación, lo que exige delimitar los criterios que vamos a utilizar en su construcción.

5. Algunas consideraciones sobre el modelo epistemológico de referencia del álgebra escolar

La propuesta que hacemos de iniciar los números negativos en un entorno algebraico, tiene que ir pareja con la introducción del álgebra, pues no se puede ir muy lejos en álgebra sin los números negativos. Esto nos sitúa en el paso de la aritmética al álgebra y, por tanto, en los comienzos del álgebra escolar.

Según Gascón (1993; véase tambien Bolea, 2003), el modelo epistemológico habitual del álgebra escolar resalta las similitudes entre la

aritmética y el álgebra y trata de presentar la segunda como una continuación de la primera, como una *aritmética generalizada*. En este modelo no cabe la visión de un álgebra cuyos objetivos y técnicas sean radicalmente distintos de los de la aritmética. Y así:
– el objetivo inicial del álgebra escolar sigue siendo el mismo que el de la aritmética: encontrar las soluciones numéricas de los problemas verbales aritméticos;
– las letras indican siempre incógnitas numéricas que hay que determinar, en detrimento de su papel como variables o parámetros y de sus posibles significados no numéricos;
– el cálculo algebraico se concibe como una simple prolongación del cálculo aritmético, con la única salvedad de que algunos números han sido sustituidos por letras.

Sin embargo, para introducir los números negativos nos interesa enfatizar las diferencias, poner de manifiesto la ruptura que supone el álgebra frente a la aritmética, como medio de justificar la necesidad de la simetrización aditiva de los números naturales o racionales positivos. El cálculo aritmético es un cálculo entre números, básicamente entre números naturales. En cambio, lo que caracteriza al cálculo algebraico es que la simetrización aditiva y multiplicativa de N permite reducir las cuatro operaciones aritméticas a dos: la suma y el producto, cuyos signos se omiten. En consecuencia, los signos “+” y “–” que en aritmética son signos operativos binarios, en álgebra pasan a ser signos predicativos o signos operativos unarios. Y asumir esta diferencia es fundamental para poder entender las reglas de juego del cálculo algebraico y la necesidad del trabajo con sumandos y sustraendos.

Por ejemplo, en aritmética la expresión 12 – 4 – 5 + 4 se entendería como una sucesión de sumas y restas de números naturales, con lo que los signos “+” y “–” estarían indicando dichas operaciones binarias. En cambio, en álgebra se interpreta como suma de los términos +12, –4, –5 y +4, donde los signos “+” y “–” tienen un sentido de signos predicativos y se suprime el signo binario que indica la suma[2]. De esta manera, las propiedades asociativa, conmutativa y de existencia del cero y de los opuestos, propias de

2. Cuando no se suprimen los signos operativos binarios aparece la llamada ‘notación completa’. La expresión 12 – 4 – 5 + 4 en notación completa se escribiría (+12) + (–4) + (–5) + (+4).

una suma, avalan fácilmente cualquier reorganización de ese cálculo [3], en particular, la eliminación de los términos –4 y +4 y su reducción a 12 – 5 = 7. En cambio, interpretando el cálculo como sumas y restas de números naturales, la justificación resulta menos fluida y exige conocer las propiedades de la resta, que no son tan evidentes como las de la suma [4].

Frente al modelo epistemológico del álgebra escolar como *aritmética generalizada*, Chevallard (1990), Gascón (1995) y Bolea (2003), entre otros, han desarrollado un modelo epistemológico alternativo, basado en la consideración del álgebra escolar como instrumento de *modelización algebraica*, que nos parece mucho más apropiado para nuestros propósitos. En él, el punto de partida son sistemas matemáticos o extramatemáticos (aritméticos, geométricos, físicos, económicos, etc.) acerca de los cuales nos planteamos preguntas que inicialmente no tienen respuesta inmediata. La búsqueda de estas respuestas lleva a la construcción de un modelo algebraico que muestre las relaciones que existen entre los diferentes componentes del sistema. Esas relaciones quedarán expresadas en forma de igualdades o desigualdades entre expresiones algebraicas en las que intervienen letras que pueden hacer un papel de incógnitas, parámetros o variables dependientes o independientes. En esas condiciones, el cálculo formal algebraico queda sustituido por un cálculo funcional, es decir, un cálculo que nunca pierde de vista el objetivo de obtener un modelo algebraico final que permita conocer las propiedades del sistema modelizado. Finalmente, la necesidad de analizar el modelo algebraico como medio para obtener información sobre el sistema lo convierte en un objeto de estudio en sí mismo.

6. La modelización algebraica de los programas de cálculo

En el modelo de *aritmética generalizada*, el cálculo algebraico se utiliza para resolver los problemas verbales aritméticos y se considera una prolongación, sin más, del cálculo aritmético. Sin embargo, desde el punto

3. En efecto, la propiedad asociativa nos permite prescindir de paréntesis, mientras que la conmutativa justifica el intercambio de los términos –4 y –5, con lo que la expresión se transforma en 12 – 5 – 4 + 4, y como la suma de un número con su opuesto es cero, resulta 12 – 4 – 5 + 4 = 12 – 5 – 4 + 4 = 12 – 5 + 0 = 7.

4. En principio, puesto que no existe una propiedad asociativa entre sumas y restas habría que entender que en la expresión 12 – 4 – 5 + 4 las operaciones se ejecutan de izquierda a derecha, ((12 – 4) – 5) + 4. Ahora, tendríamos que utilizar la propiedad que dice que (a – b) – c = (a – c) – b. Esto nos permitiría escribir ((12 – 5) – 4) + 4. Por último, sería necesario asumir la propiedad que dice que (a – b) + b = a, y con esto podríamos justificar el cálculo ((12 – 4) – 5) + 4 = ((12 – 5) – 4) + 4 = (7 – 4) + 4 = 7.

de vista de la *modelización algebraica*, se entiende que el enunciado del problema describe un sistema acerca del cual se quieren obtener ciertas informaciones y la ecuación o ecuaciones que lo resuelven son el modelo algebraico, intrínsecamente distinto del sistema que modeliza, que permite encontrar las respuestas. Y la potencia de resolución del método algebraico se muestra sobre todo cuando los datos del problema se presentan en forma de parámetros. Esto convierte la solución numérica en una fórmula cuyo segundo miembro es una expresión algebraica que indica las operaciones a realizar para resolver todos los problemas del mismo tipo, es decir, todos los problemas que sólo se diferencian en el valor numérico de los datos. La utilización de parámetros (Chevallard, 1990; Bolea, 2003) transforma la actividad de resolver problemas en una actividad de modelización algebraica de tipos de problemas y la dota de un mayor grado de algebrización.

En este contexto, la expresión algebraica cumple la función de conservar una memoria de los datos y cálculos, mostrar la estructura del problema y construir *programas de cálculo* (Bolea, 2003). Es más, desde el momento en que la expresión algebraica indica las operaciones a realizar entre los datos, hay que entenderla como un modelo algebraico de un programa de cálculo aritmético. Esto tiene como consecuencia que, mientras en la organización matemática de los programas de cálculo, la actividad matemática consiste en efectuar cálculos, en la organización matemática de las expresiones algebraicas, los programas de cálculo se convierten en un objeto de estudio, y el medio para estudiarlos es el cálculo algebraico.

Además, la algebrización de los programas de cálculo permite asumir el tipo de tareas algebraicas habituales en el currículo escolar (Bolea, 2003):

– Pasar de la formulación retórica de un programa de cálculo a su formulación algebraica.
– Reconocer si dos programas de cálculo son equivalentes.
– Encontrar un programa de cálculo equivalente a otro dado, pero que sea “más simple” respecto a ciertos criterios de simplicidad dependientes de los medios de cálculo y de la función que cumpla el programa de cálculo.

7. Criterios utilizados en la construcción de un modelo epistemológico de referencia para introducir los números negativos

Explicitamos a continuación los criterios que, como consecuencia del análisis realizado en los apartados anteriores, vamos a utilizar en la construcción del modelo epistemológico de referencia para introducir los números negativos. Son los siguientes:

a) La introducción de los números negativos y del álgebra elemental debe iniciarse simultáneamente ya que, por un lado, los números negativos necesitan un entorno algebraico que ponga de manifiesto su razón de ser y contribuya a la superación de posibles obstáculos epistemológicos, mientras que, por otro lado, las técnicas de cálculo algebraico sólo pueden avanzar si se establecen las reglas de los signos.

b) El modelo epistemológico de referencia del álgebra elemental que utilizamos es el de *modelización algebraica* porque permite resaltar las diferencias entre el trabajo algebraico y el aritmético, tiene en cuenta desde sus inicios la consideración de las letras como parámetros y variables y obtiene como solución de los problemas un modelo algebraico que, a su vez, se convierte en objeto de estudio.

c) Más concretamente, proponemos inicialmente problemas verbales aritméticos directos y parametrizados, es decir, problemas cuya modelización inmediata viene dada por una fórmula (una función explícita de la solución respecto a los parámetros). El estudio de las expresiones algebraicas que modelizan los programas de cálculo aritmético que solucionan los problemas permite operar en términos de sumandos y sustraendos y evita, en un primer momento, la necesidad de gestionar los dos miembros de una ecuación para despejar la incógnita.

d) Simetrizamos el conjunto de números conocido por los alumnos porque la diferencia de coste entre la simetrización de los números naturales o la de los racionales y decimales es pequeña.

e) De acuerdo con los estudios epistemológicos, en la construcción escolar del número negativo distinguimos cuatro etapas cuyos objetivos son los siguientes:

> i) Pasar de las operaciones entre números a las operaciones entre sumandos y sustraendos y del significado operativo binario de los signos “+” y “–” al significado predicativo y operativo unario. Su razón de ser es la economía de gestión y justificación del cálculo algebraico. En esta etapa queda establecida la estructura aditivo-multiplicativa de los sumandos y sustraendos.
>
> ii) Reinterpretar los signos predicativos como signos operativos unarios y considerar la doble valencia de parámetros, variables o incógnitas como sumandos o sustraendos. Su razón de ser es la necesidad de unificar las distintas fórmulas que modelizan algebraicamente un sistema en función del

diferente papel como sumando o sustraendo que puede tomar alguna de sus variables o parámetros. En esta etapa se asume que el signo que acompaña a las letras es siempre un signo operativo unario. [5]

iii) Aceptar los sumandos y sustraendos como nuevos números que amplían los conjuntos numéricos ya conocidos, reinterpretar la estructura aditivo-multiplicativa de sumandos y sustraendos en términos de estructura numérica y establecer la estructura ordinal. Su razón de ser es la construcción de la recta real y de la clausura algebraica de los números naturales. [6] En esta etapa se retoma la consideración de los signos "+" y "–" como símbolos operativos binarios y se trabaja con las notaciones completas.

iv) Revisar las propiedades que caracterizan la "condición" de número a la luz de las sucesivas ampliaciones del conjunto de los números naturales como consecuencia de su simetrización aditiva y multiplicativa. Su razón de ser es la necesidad de asumir que un número no siempre puede interpretarse como una medida y que cada nueva ampliación numérica supone una modificación de las propiedades que cumplen "todos" los números.

f) Dentro de la primera etapa, introducimos primero la estructura aditiva de los sumandos y sustraendos y, posteriormente, la estructura multiplicativa.

8. Cuestiones generatrices globales en el modelo epistemológico de referencia para introducir los números negativos

El modelo epistemológico de referencia que proponemos para introducir los números negativos se articula en torno a tres cuestiones generatrices globales. Son las siguientes:

Q_0. ¿Cómo encontrar la expresión algebraica canónica que soluciona un problema verbal aritmético cuando alguno de los datos que intervienen en su resolución es desconocido?

5. Es decir, en el término "–*a*" el signo "–" no es un signo predicativo, no indica que ese término es un sustraendo, sino que es un signo operativo unario que indica que "–*a*" tiene el sentido opuesto a "*a*": si "*a*" es un sustraendo, "–*a*" será un sumando, y si "*a*" es un sumando, "–*a*" será un sustraendo.

6. El hecho de que una gestión más eficaz del cálculo algebraico exija tomar en consideración a los números con el signo "+" ó "–" que les precede no significa que ese nuevo objeto matemático, el número con su signo, tenga que ser considerado a su vez un número. Históricamente no ha sido así, se han necesitado muchos siglos para pasar de los sumandos y sustraendos a los números positivos y negativos. Y el motor que ha forzado este paso ha sido, por un lado, la necesidad de encontrar un conjunto numérico en el que todo polinomio con coeficientes en dicho conjunto tuviera, al menos, una raíz en dicho conjunto y, por otro lado, la construcción de la recta real y el desarrollo de la geometría analítica y del análisis matemático.

Q_0’. En aquellos problemas en los que la solución viene dada por expresiones algebraicas diferentes según los valores como sumandos o sustraendos que pueden tomar ciertos parámetros del sistema, ¿cómo encontrar una expresión algebraica única que dé solución al problema en todos los casos?

Q_0”. ¿Qué consecuencias tiene considerar los sumandos y sustraendos como nuevos números y en qué modifica esa decisión las propiedades que cumplen “todos” los números?

La cuestión Q_0 corresponde a la primera etapa definida en el criterio e), nos proporciona la razón de ser de la sustitución del cálculo con números por el cálculo con sumandos y sustraendos, es decir, con números precedidos de un signo “+” o “–”, y conduce a la construcción de sus reglas de cálculo.

La cuestión Q_0’ corresponde a la segunda y tercera etapa indicadas en el criterio e) y muestra la necesidad de interpretar como símbolos operativos unarios los signos “+” y “–” que acompañan a las letras. Asimismo, pone de manifiesto algunas de las razones por las cuales los sumandos y sustraendos terminaron por adquirir la consideración de números y permite definir criterios de ordenación.

La cuestión Q_0” se relaciona con la tercera y cuarta etapa indicadas en el criterio e) y sigue incidiendo en la necesidad de ampliar el campo numérico, de reinterpretar las operaciones con sumandos y sustraendos en términos de operaciones entre números y de volver a negociar en la clase de matemáticas qué se entiende por número.

9. Cuestiones generatrices locales asociadas a Q_0

La cuestión Q_0 se desglosa en las siguientes cuestiones generatrices locales:

Q_1. ¿Cómo encontrar la expresión algebraica canónica que soluciona un problema verbal aritmético aditivo directo cuando alguno de los datos que intervienen en su resolución es desconocido?

Q_2. ¿Cómo encontrar modelos algebraicos más simples de un programa de cálculo aditivo?

Q_3. ¿Cómo encontrar la expresión algebraica canónica que soluciona un problema verbal aritmético aditivo-multiplicativo directo cuando alguno de los datos que intervienen en su resolución es desconocido?

Q_4. ¿Cómo encontrar modelos algebraicos más simples de un programa de cálculo aditivo-multiplicativo?

Las tareas asociadas a la cuestión Q_1 consisten en resolver problemas verbales aritméticos cuyo programa de cálculo contenga sólo sumas y restas.

Además, estos problemas tienen que ser directos, es decir, su solución no debe exigir el planteamiento de una ecuación en la que haya que despejar la incógnita, y tienen que estar parcial o totalmente parametrizados. La expresión algebraica que los soluciona es del tipo $a \pm b \pm c \pm d \pm \ldots$, donde a, b, c, d, etc., pueden ser parámetros o números. Por ejemplo, en los problemas siguientes:

> P_{11}: Laura se llevó sus tazos[7] al colegio para jugar varias partidas. En la primera perdió 9 tazos y en la segunda ganó 7. ¿Cuántos tazos le quedaron después de jugar?
>
> P_{12}: Un tren sale de Zaragoza con cierto número de pasajeros. En la primera parada, bajan 15 y suben 12 pasajeros; en la segunda parada, bajan 38 y suben 42 pasajeros. ¿Con cuántos pasajeros llegó el tren a la tercera parada?

La tarea consiste en parametrizar el número inicial de tazos o de pasajeros para dar como solución una primera expresión algebraica que, en el caso de P_{11}, puede ser $a - 9 + 7$ ó $a - 2$, y en el caso de P_{12}, $a - 15 + 12 - 38 + 42$ ó $a - 3 + 4$ ó $a + 1$, entre otras.

Una vez expresado en forma algebraica el programa de cálculo que resuelve el problema, se plantea la necesidad de encontrar un programa de cálculo equivalente (forma canónica de la expresión algebraica) para que, una vez determinados los parámetros, la solución numérica se encuentre efectuando el menor número de operaciones. También surge la necesidad de contrastar la equivalencia entre los distintos programas de cálculo que aparecen como solución al problema.

En todas estas tareas, la presencia de los parámetros obliga a cambiar la forma de entender los signos "+" y "–", ya que su interpretación como signos operativos binarios no permite calcular con fluidez. Por ejemplo, para simplificar la expresión a –9 + 7 es necesario pensar que "restarle 9 al parámetro y después sumarle 7 es lo mismo que restarle 2", lo que convierte los signos en símbolos que preceden a un número e indican una característica del mismo. De ese modo, pasamos del símbolo operativo binario al símbolo predicativo.

En las tareas asociadas a la cuestión Q_2 se presentan programas de cálculo aditivos modelizados algebraicamente y se buscan programas de cálculo equivalentes y más sencillos, es decir, cuyas expresiones algebraicas sean canónicas. Por ejemplo:

7. Un "tazo" es una ficha de plástico con un dibujo de algún personaje animado en una de las caras. El juego consiste en tirar las fichas al suelo y apostar por el lado que saldrá.

Para cada una de las expresiones algebraicas siguientes encuentra otra expresión equivalente y más simple.

$a + 5 + 8 - 6$

$b - 6 - 10 - 4$

$12 - a - 5$

$7 + b - 9 + 1$

$a + 7 + a - 5 - a$

$c + 15 - 37 - 14 - 1 + 37 + 2$

El objetivo que se busca, a través del ejercicio de la técnica, es la familiarización de los alumnos con la estructura aditiva de sumandos y sustraendos. Se trata de que, finalmente, puedan realizar la siguiente tarea:

Completa estas frases:

Sumar 5 y sumar 2 es lo mismo que ______________________

Sumar 5 y restar 2 es lo mismo que ______________________

Restar 5 y sumar 2 es lo mismo que ______________________

Restar 5 y restar 2 es lo mismo que ______________________

y asumir la estructura de grupo de la composición de traslaciones.

Una vez establecida la estructura aditiva, se presenta la estructura multiplicativa mediante las tareas asociadas a las cuestiones Q_3 y Q_4. Por ejemplo, en el problema siguiente:

Javier compró tres libros que costaban lo mismo. Le hicieron un descuento de 2 euros por libro y pago con un billete de 50 euros. ¿Cuánto dinero le devolvieron?

La tarea consiste en parametrizar el precio de cada libro y escribir la expresión algebraica que soluciona el problema en función del parámetro, $50 - 3(a - 2)$. Esta expresión no acepta una interpretación directa en términos de composición de traslaciones; hay que entenderla inicialmente como una "operación de operaciones": a 50 tengo que restarle un producto, uno de cuyos términos es, a su vez, una resta. La búsqueda de expresiones algebraicas equivalentes, $50 - 3a + 6$ ó $56 - 3a$, hace patente la regla "restar una resta equivale a restar el minuendo y sumar el sustraendo" y abre el camino para el establecimiento de las reglas de los signos cuando se multiplican sumandos y sustraendos.

El trabajo de la técnica tiene que poner de manifiesto la necesidad del uso de paréntesis, de definir una jerarquía de operaciones y de transformar las operaciones de operaciones en operaciones entre sumandos y sustraendos. Aparece así la estructura aditivo-multiplicativa de los sumandos y sustraendos como cálculo intermediario que permite nuevamente reducir las expresiones algebraicas a una composición de traslaciones.

10. Cuestiones generatrices locales asociadas a Q_0'

La cuestión Q_0' se desglosa en las siguientes cuestiones generatrices locales:

> Q_1'. ¿Cómo encontrar una expresión algebraica única que exprese una cantidad final obtenida como consecuencia de someter una cantidad inicial a un proceso indistinto de aumento o disminución?
> Q_2'. ¿Cómo encontrar una expresión algebraica única que exprese la distancia entre dos posiciones situadas a izquierda o derecha de una posición origen?
> Q_3'. ¿Cómo encontrar una expresión algebraica única que exprese una función afín aplicada a posiciones situadas a izquierda o derecha de una posición origen?

De la respuesta a estas cuestiones y la realización de las tareas asociadas a las mismas surge la necesidad de interpretar los signos que preceden a las letras como símbolos operativos unarios y de manejar una notación completa. Por ejemplo, en las tareas siguientes, correspondientes a las dos primeras cuestiones:

> En cada caso, expresa algebraicamente la operación que se indica:
> a) a un número *n* se le suma otro número *m*.
> b) a un número *n* se le resta otro número *m*.
> c) un número *n* se ve afectado por otro número *m*, pero de antemano no sabemos si *m* se suma o se resta a *n*.
> En una carretera se elige un punto intermedio como origen de distancias y se le llama 0. A partir de él, se indican los puntos situados a 1 km, 2 km, 3 km, etc., con los nombres: 1*d*, 2*d*, 3*d*, etc., cuando recorremos la carretera en un sentido, y 1*i*, 2*i*, 3*i*, etc., cuando nos movemos en el sentido contrario. A qué distancia en km están:
> a) los puntos *nd* y *md* con $n < m$.
> b) los puntos *ni* y *mi* con $m < n$.
> c) los puntos *ni* y *md*.
> ¿Podemos encontrar una fórmula de la distancia que sirva para los tres casos a la vez?

La expresión algebraica que representa el resultado, en principio, no es única. En la primera tarea es $n + m$ ó $n - m$, mientras que en la segunda es *m*

$-n$, $n - m$ ó $n + m$, respectivamente. La pregunta de si se podría encontrar una única expresión algebraica que sirviera para todos los casos, abre la posibilidad, por un lado, de considerar que la letra lleva incorporado implícitamente el signo predicativo y que el signo que la precede tiene un significado operativo unario y, por otro lado, de que aparezca por primera vez la notación completa (por ejemplo, $(-3) - (-5)$, cuando $m = -3$ y $n = -5$) que reintroduce el sentido operativo binario de los signos "+" y "–".

Y así, en la primera tarea la fórmula de resolución será $n + m$ siempre que aceptemos que m ya no tiene simplemente un valor numérico, sino que tendrá que sustituirse por un número acompañado de un signo que indique su función como sumando o sustraendo dentro de la expresión algebraica. De la misma manera, en la segunda tarea podemos tomar $m - n$ como fórmula única de resolución siempre que entendamos que m y n representan números precedidos del signo "+" ó "–" según que correspondan a puntos situados a la derecha o izquierda del origen.

Una vez establecida la relación entre los puntos de la recta y los objetos matemáticos entendidos hasta ahora como sumandos y sustraendos, proponemos la extensión de dicha notación al plano como medio de encontrar una única fórmula que represente la función afín. La tarea inicial correspondiente a la cuestión Q_3' puede ser la siguiente:

> Dibujamos en una hoja de papel dos rectas perpendiculares, una horizontal y otra vertical a las que llamamos ejes. El punto donde se cortan los ejes lo llamamos punto 0 y a partir de ahí marcamos centímetros a derecha e izquierda en la recta horizontal y hacia arriba y hacia abajo en la recta vertical.
>
> Para indicar un punto en el plano decimos cuántos cm tenemos que recorrer desde el punto O, siguiendo la recta horizontal a derecha o izquierda. Llegaremos a un punto H. Por ese nuevo punto H trazamos una recta vertical y decimos cuántos cm tenemos que recorrer siguiendo esa recta desde el punto H hacia arribo o abajo para encontrar el punto buscado.
>
> a) Dibuja en el plano los puntos correspondientes a la siguiente tabla:

1 cm a la derecha	3 cm hacia arriba
2 cm a la derecha	4 cm hacia arriba
3 cm a la derecha	5 cm hacia arriba
1 cm a la izquierda	1 cm hacia arriba
2 cm a la izquierda	0 cm
3 cm a la izquierda	1 cm hacia abajo

b) Encuentra una fórmula que relacione los cm horizontales con los cm verticales de los puntos de la tabla

c) Si un punto de la tabla está situado 8 cm a la izquierda, ¿a cuántos cm verticales estará situado?

Todo esto, es decir, el uso de números precedidos de un signo "+" ó "–". para modelizar determinados sistemas, y no sólo como objetos intermediarios del cálculo algebraico, la gestión de los cálculos con la notación completa, y el hecho de que los números precedidos de un signo son valores que puede tomar un parámetro o una incógnita, son razones que avalan su aceptación como números positivos y negativos.

Referencias

Bell, A. (1982). Looking at children and directed numbers. *Mathematics Teaching, 100*, 66-72.

Bell, A. (1986). Enseñanza por diagnóstico. Algunos problemas sobre números enteros. *Enseñanza de las Ciencias, 4*(3), 199-208.

Bolea, P. (2003). *El proceso de algebrización de organizaciones matemáticas escolares.* Zaragoza, España: Prensas Universitarias de Zaragoza.

Brousseau, G. (1983). Les obstacles épistémologiques et les problèmes en mathématiques. *Recherches en didactique des mathématiques, 4*(2), 165-198.

Bruno, A. (1997). La enseñanza de los números negativos: aportaciones de una investigación. *Números, 29*, 5-18.

Bruno, A. & Martinón, A. (1994). La recta en el aprendizaje de los números negativos. *Suma, 18*, 39-48.

Chevallard, Y. (1988). La dialectique entre études locales et théorisation : le cas de l'algèbre dans l'enseignement du second degré. En G. Vergnaud, G. Brousseau & M. Hulin (Eds.), *Didactique et acquisition des connaissances scientifiques* (pp. 305-323). Grenoble: La Pensée sauvage.

Chevallard, Y. (1990). Le passage de l'arithmétique à l'algébrique dans l'enseignement des mathématiques au collège. Troisième partie. Voies d'attaque et problèmes didactiques. *Petit x, 23*, 5-38.

Cid, E. (2000, abril). Obstáculos epistemológicos en la enseñanza de los números negativos. *XIV Jornadas del Seminario Interuniversitario de Investigación en Didáctica de las Matemáticas*, Cangas, España.

http://www.ugr.es/~jgodino/siidm/boletin10.htm

Cid, E. (2002). Los modelos concretos en la enseñanza de los números negativos. *Actas de las X Jornadas para el Aprendizaje y Enseñanza de las Matemáticas* (Vol. 2, pp. 529-542). Zaragoza, España: Publicaciones de la Universidad de Zaragoza.

Gallardo, A. (1994). Negative numbers in algebra. The use of a teaching model. En J. P. da Ponte & J. F. Matos (Eds.), *Proceedings of the XVIIIth International Conference for the Psychology of Mathematics Education* (Vol. 2, pp. 376-383). Lisboa, Portugal.

Gallardo, A. (2002). The extension of the natural-number domain to the integers in the transition from arithmetic to algebra. *Educational Studies in Mathematics, 49*(2), 171-192.

Gascón, J. (1993). Desarrollo del conocimiento matemático y análisis didáctico: del patrón análisis-síntesis a la génesis del lenguaje algebraico. *Recherches en didactique des mathématiques, 13*(3), 295-332.

Gascón, J. (1995). Un nouveau modèle de l'algèbre élémentaire comme alternative à l'« arithmétique généralisée ». *Petit x, 37*, 43-63.

Glaeser, G. (1981). Épistémologie des nombres relatifs. *Recherches en didactique des mathématiques, 2*(3), 303-346.

González Marí, J. L. (1995). *El campo conceptual de los números naturales relativos* (Tesis doctoral). Universidad de Granada, España.

Janvier, C. (1983). The understanding of directed numbers. En J. C. Bergeron & N. Herscovics (Eds.), *Proceedings of the XVth Annual Conference of the North American Chapter of Psychology of Mathematics Education* (Vol. 2, pp. 295-301). Montreal, Canadá.

Liebeck, P. (1990). Scores and Forfeits. An Intuitive Model for Integer Arithmetic. *Educational Studies in Mathematics, 21*(3), 221-239.

Lytle, P. A. (1994). Investigation of a model based on the neutralization of opposites to teach integer addition and subtraction. En J. P. da Ponte & J. F. Matos (Eds.), *Proceedings of the XVIIIth International Conference for the Psychology of Mathematics Education* (Vol. 3, pp. 192-199). Lisboa, Portugal.

Mukhopadhyay, S. (1997). Story telling as sense-making: children's ideas about negative numbers. *Hiroshima Journal of Mathematics Education, 5*, 35-50.

Schubring, G. (1986). Ruptures dans le statut mathématique des nombres négatifs. *Petit x, 12*, 5-32.

Vlassis, J. (2004). *Sens et symboles en mathématiques. Étude de l'utilisation du signe moins dans les réductions polynomiales et la résolution d'équations du premier degré à une inconnue* (Tesis doctoral). Universidad de Lieja, Bélgica.