La algebrización de los programas de cálculo aritmético y la introducción del álgebra en Secundaria

Noemí Ruiz Munzón
Universitat Autònoma de Barcelona, España

Marianna Bosch
Universitat Ramon Llull, España

Josep Gascón
Universitat Autònoma de Barcelona, España

Abstract. This paper approaches the didactic problem of introducing secondary school students to the functional use of the algebraic tool. The starting point is the modelling of a very elementary system: the "programmes of arithmetic calculation". We show some questions the answer of which needs to go through the different stages of the algebrisation process. We then obtain an *a priori* design of a set of "study and research activities" that has been partially experimented with Spanish students of grades 8 and 9 (13-15 years old).

Résumé. Nous abordons le problème didactique d'introduire les élèves du Secondaire à l'usage fonctionnel de l'instrument algébrique. Pour cela, nous partons de la modélisation d'un système très élémentaire, les « programmes de calcul arithmétique », et nous montrons quelles sont les questions dont la réponse requiert de parcourir progressivement les étapes successives du processus d'algébrisation. On obtient alors un dessin *a priori* d'une série d'activités d'étude et de recherche qui ont été partiellement expérimentées avec des élèves espagnols de la 2e et 3e année de l'enseignement secondaire obligatoire (13-14 et 14-15 ans).

Resumen. En este trabajo abordamos el problema didáctico de iniciar a los alumnos de secundaria en el uso funcional del instrumento algebraico. Para ello partimos de la modelización de un sistema muy elemental, los "programas de cálculo aritmético", y mostramos cuáles son las cuestiones cuya respuesta requiere ir recorriendo progresivamente las sucesivas etapas del proceso de algebrización. Con ello se consigue un diseño *a priori* de una serie de actividades de estudio e investigación que han sido experimentadas parcialmente con alumnos españoles de 2º y 3º curso de la educación secundaria obligatoria (13-14 y 14-15 años).

Bronner, A., Larguier, M., Artaud, M., Bosch, M., Chevallard, Y., Cirade, G. & Ladage, C. (Éds)
Diffuser les mathématiques (et les autres savoirs) comme outils de connaissance et d'action (pp. 655-676)
IIe congrès international sur la TAD (Uzès, 31 oct.-3 nov. 2007)
Axe 3. *Théorie et pratique des AER et des PER*

1. Formulación del problema didáctico

Partiremos de los trabajos de Josep Gascón (1993, 1995, 1999) en el ámbito de la teoría antropológica de lo didáctico (TAD) en los que se ha analizado el fenómeno de la *aritmetización del álgebra escolar*, mostrando que dicho fenómeno responde a la interpretación dominante en la institución escolar del álgebra elemental como *aritmética generalizada*. Esta interpretación consiste en identificar el álgebra escolar con el "simbolismo algebraico" (o lenguaje algebraico), frente a un supuesto "lenguaje aritmético". En la tesis de Pilar Bolea (2003) se destacan algunas de las características principales de esta interpretación del álgebra escolar como aritmética generalizada.

Interpretar el álgebra como una aritmética generalizada supone asumir que el álgebra se construye en un contexto numérico, a modo de generalización de los cálculos con números y de la traducción de expresiones numérico-verbales, donde las expresiones algebraicas nacen de la necesidad de representar y manipular números desconocidos. Por ello, en la escritura y manipulación de expresiones algebraicas, es muy importante distinguir entre los datos conocidos y las incógnitas. Se determinan entonces las tareas más importantes en *álgebra escolar* como: la traducción del lenguaje natural al lenguaje algebraico, el cálculo algebraico (interpretado como la manipulación formal de las reglas aritméticas con letras y números) y la resolución de ecuaciones.

En resumen, en las matemáticas que se proponen para ser estudiadas en el nivel de la enseñanza obligatoria, se identifica prácticamente el álgebra elemental con la *manipulación formal* de expresiones algebraicas, lo que incluye la resolución de ecuaciones y de ciertos ototipos de "problemas de planteo". En nuestro caso, y apoyándonos en trabajos previos de Yves Chevallard sobre el álgebra como herramienta de modelización (Chevallard, 1984, 1989, 1990), consideramos que el *álgebra* debe interpretarse *como un instrumento genérico de modelización* de praxeologías u organizaciones matemáticas (Bolea, Bosch & Gascón, 2001) [1]. Postulamos que el álgebra escolar, antes de ser introducida como objeto explícito de enseñanza, debe utilizarse para profundizar el estudio de determinadas organizaciones matemáticas (en adelante, OM) previamente construidas y, en particular,

1. En realidad el "álgebra" no es la única área de las matemáticas escolares que puede interpretarse como instrumento de modelización. De hecho, la geometría fue durante siglos un instrumento esencial de modelización ("geométrica"). Aunque con el advenimiento del álgebra la "matematización" progresiva se identifica principalmente con una "algebrización" progresiva.

para plantear y abordar *cuestiones tecnológicas* relativas a las características de sus técnicas matemáticas (descripción, generalización y justificación, economía, dominio de validez, etc.), a la estructura y organización de los tipos de problemas, al estudio del problema de la existencia y unicidad de sus soluciones y a la estructura del conjunto de las soluciones de los mismos. Estamos así en disposición de formular el problema didáctico que pretendemos abordar:

> ¿En qué medida y en qué forma es didácticamente viable, en el actual sistema de enseñanza de las matemáticas, *iniciar a los alumnos de la ESO en el uso funcional del instrumento algebraico*? ¿Qué OM puede tomarse como sistema inicial a modelizar? ¿Qué ampliaciones progresivas de la OM se pueden llevar a cabo durante este proceso de modelización? ¿Qué cuestiones problemáticas pueden guiar el proceso de estudio? ¿Qué dispositivos didácticos se requerirán para llevar a cabo este proceso?

Para realizar una aproximación al problema didáctico formulado haremos un esbozo de un proceso de estudio en el que, a partir de una OM en torno a los problemas aritméticos, se llevará a cabo un proceso de modelización algebraica generada por un cuestionamiento tecnológico. En el siguiente apartado haremos una descripción de las diferentes etapas del proceso de algebrización y de lo que entendemos por *modelización algebraica*.

2. Algebrización de una OM en torno a los "problemas aritméticos"

2.1. El sistema inicial de los "programas de cálculo aritmético"

Elegimos como sistema inicial una OM en torno a los "problemas aritméticos" escolares y la modelizaremos para estudiar cuestiones que surgen a propósito de estos problemas. Partiremos de la noción clásica de "problema aritmético" considerando aquellos problemas que pueden resolverse mediante una cadena de operaciones aritméticas (+, –, ×, /, etc.) ejecutables a partir de los datos del problema, datos que acostumbran a ser cantidades conocidas de ciertas magnitudes. Se puede también añadir la condición adicional de que cada uno de los resultados "intermedios" de la cadena de operaciones tenga sentido o pueda interpretarse en el contexto del enunciado del problema.

Consideramos por lo tanto una OM generada por los problemas aritméticos (que pueden considerarse como las tareas problemáticas de partida) cuyas técnicas clásicas de resolución se materializan en discursos verbales que, partiendo de los datos y mediante una cadena de operaciones aritméticas, permiten calcular la cantidad incógnita. Siguiendo la propuesta de Y. Chevallard (2002), a dicho proceso de resolución o cadena estructurada y jerarquizada de operaciones aritméticas lo denominaremos *"programa de cálculo aritmético"* (PCA, para abreviar). Veremos que, si consideramos que el "patrón clásico de análisis-síntesis" (Gascón, 1993) constituye la técnica de resolución por excelencia de los problemas aritméticos, entonces un PCA también puede considerarse como la *síntesis de la resolución* (inicialmente oral) de una cierta clase de problemas aritméticos. Los elementos tecnológico-teóricos que permiten describir, justificar e interpretar esta práctica matemática elemental se reducen esencialmente a las propiedades de las operaciones entre cantidades de magnitudes, de las operaciones aritméticas y de las relaciones entre ellas, aunque también se podría añadir, en el nivel teórico, el discurso implícito que describe e interpreta el citado patrón de análisis-síntesis.

Presentamos a continuación un proceso prototípico de modelización algebraica tomando como sistema de estudio inicial los problemas aritméticos y las técnicas de resolución de estos problemas (ejecución paso a paso del enunciado, técnica oral, etc.). Dado que a cada problema aritmético le podemos asociar un PCA, podríamos describir el proceso que sigue como la *algebrización de los programas de cálculo aritmético*. Para ejemplificar el proceso, partiremos de ciertos problemas aritméticos concretos y de los respectivos PCA asociados, con las ventajas e inconvenientes que siempre provoca el empleo de ejemplos presuntamente "genéricos".

Para generar una problemática tecnológica en torno a los problemas aritméticos, se requiere partir de cuestiones que provoquen la necesidad de considerar y tratar las técnicas o procesos de resolución como objetos de estudio en sí mismos. Esta objetivación del proceso de resolución de un problema aritmético constituye precisamente la primera función (y no la menos importante) de la noción de PCA. Tal como indica Y. Chevallard (2004), los PCA aparecen y se ejecutan en el trabajo matemático de los alumnos desde los inicios de la enseñanza primaria, pero nunca se tematizan ni se plantean cuestiones tecnológicas sobre su descripción, justificación, alcance, ni tampoco es posible enunciar teoremas relativos a los mismos. Dicho en otros términos, los PCA forman parte de la *práctica matemática* escolar, pero son objetos no matematizados o *paramatemáticos*.

Éste será, por tanto, el punto de partida de nuestro proceso de modelización. Como hemos dicho, tomaremos como sistema inicial a modelizar la OM generada por los problemas aritméticos con sus técnicas de resolución o PCA asociados. Un ejemplo típico de problema aritmético, que consideraremos aquí en una forma "estilizada" formulándolo directamente en términos de la ejecución de un PCA, puede ser el siguiente:

> *P_0. Gabriel piensa un número, le suma 25, divide el resultado entre 2, resta 8 y lo multiplica todo por 3. Si al final obtiene 21, ¿qué número pensó Gabriel?*
>
> La resolución aritmética del problema puede formularse como sigue: "Si al final obtiene 21, antes de multiplicar por 3 tenía 7, antes de restarle 8 tenía 15, antes de dividir por 2 tenía 30 y antes de sumar 25 tenía 5. Luego Gabriel pensó el número 5".
>
> Si designamos por *n* el número solución buscado, la explicitación del patrón de análisis-síntesis aplicado a este caso puede tomar la forma siguiente (que llamaremos "técnica inversa"):

ANÁLISIS

$$\longleftarrow$$

$$\begin{array}{|c|ccccccc|c|}
 & -25 & & \times 2 & & +8 & & :3 & \\
5 & \leftarrow & 30 & \leftarrow & 15 & \leftarrow & 7 & \leftarrow & 21 \\
\parallel & & \parallel & & \parallel & & \parallel & & \parallel \\
n & \rightarrow & A & \rightarrow & B & \rightarrow & C & \rightarrow & D \\
 & +25 & & :2 & & -8 & & \times 3 &
\end{array}$$

$$\longrightarrow$$

SÍNTESIS

Podemos suponer que este problema forma parte de las tareas que componen cierta OM que tomamos como sistema inicial y que denominamos *S*. Este sistema está compuesto por la OM en torno a los problemas aritméticos y contiene tanto la ejecución de los PCA en forma retórica como la utilización del patrón de análisis-síntesis en el sentido que acabamos de indicar. Veremos que en *S* (y en los sucesivos modelos de *S*) es fácil plantear cuestiones de naturaleza tecnológica: cuestiones relativas al porqué se obtiene el tipo de resultado que se obtiene; a la interpretación de estos resultados, al alcance o dominio de validez de las técnicas; a la delimitación de los tipos de problemas que se resuelven con un mismo PCA; a las condiciones que se requieren (en términos de relaciones entre los datos) para que un tipo de problemas tenga solución o ésta sea única; a la estructura del conjunto de las soluciones de los diferentes tipos de problemas; etc. Este tipo de cuestionamiento provocará la necesidad de ampliar el sistema inicial mediante progresivas modelizaciones que caracterizaremos a continuación.

2.2. Primera etapa del proceso de algebrización

Para ejemplificar un primer tipo de incompletitud de la OM inicial en torno a los problemas aritméticos, podemos considerar un problema (que también formularemos en términos de la ejecución de PCA) como el siguiente:

> P_1. *Piensa un número, súmale el doble de su consecutivo, suma 15 al resultado y, por último, resta el triple del número pensado inicialmente. ¿Qué resultado se obtiene? ¿Qué pasa si se cambia el número pensado inicialmente?*
>
> Por ejemplo, si el número es 49, se obtiene: PCA (49) = 49 + 2·50 + 15 – 3·49 = 17.
>
> Si se toma inicialmente el 10, se obtiene: PCA (10) = 10 + 2·11 + 15 – 3·10 = 17.

La resolución aritmética de este problema, es decir la ejecución del PCA indicado, proporciona siempre el mismo resultado numérico, 17, independientemente del número pensado inicialmente. Aparece, por tanto, una cuestión tecnológica ("¿Por qué se obtiene el mismo resultado independientemente del número pensado?") que no se puede responder fácilmente con las técnicas aritméticas de la OM inicial. [2]

Para responder a este tipo de cuestiones se requerirá considerar el PCA como un todo, por ejemplo traduciendo la *formulación retórica* del PCA a una *formulación escrita* (simbólica) de dicho PCA y construir nuevas técnicas, esencialmente de "simplificación", para trabajar sobre éstos. Podemos por lo tanto considerar aquí que una "expresión algebraica" es la formulación simbólica de un PCA que se aplica sobre alguna cantidad de magnitud no determinada inicialmente. Por "simplificar un PCA" se entiende entonces la operación de transformarlo en otro *equivalente* [3] y que,

2. Aunque es cierto que la simplificación puede hacerse oralmente en casos sencillos como el que aquí presentamos, es fácil complicar el PCA para hacer que la técnica oral de simplificación sea impracticable.

3. Dado un cierto dominio **D**, se dice que dos PCA son ***equivalentes en*** **D** si y sólo si (P(n) = Q(n) $\forall n \in$ **D**). Denotaremos esta relación mediante el símbolo P(n) $\equiv$ Q(n) haciendo

en cierto sentido, sea más “sencillo”, “adaptado” o “adecuado” para utilizarlo en una actividad matemática concreta. Para ello, se introducen *símbolos* (□, ♥, *n*, ☺, *maría*) que permiten identificar y explicitar los argumentos del PCA y cuyo ámbito numérico debe delimitarse. En nuestro ejemplo aparece un único argumento y suponemos que su ámbito numérico lo constituyen los números naturales:

$$\text{PCA}(\heartsuit) = \heartsuit + 2\cdot(\heartsuit + 1) + 15 - 3\cdot\heartsuit.$$

El paso de la formulación retórica de un PCA a su formulación simbólica pone en juego la necesidad de *escribir la secuencia de operaciones en una única línea* y, por lo tanto, deben tomarse en consideración la *jerarquía de las operaciones*, las reglas del *uso de paréntesis* y las propiedades de las relaciones entre las operaciones (elementos tecnológicos).

$$\begin{aligned}\text{PCA}(\heartsuit) &= \heartsuit + 2\cdot(\heartsuit + 1) + 15 - 3\cdot\heartsuit = \heartsuit + 2\cdot\heartsuit + 2 + 15 - 3\heartsuit \\ &= 3\heartsuit - 3\heartsuit + 17 = 17.\end{aligned}$$

Este primer paso del proceso de algebrización se materializa así en una nueva OM que denominamos M_1 y que puede interpretarse como un primer modelo del sistema inicial, ya que permite modelizar los elementos del mundo aritmético considerado. Veremos a continuación que M_1 constituye una verdadera ampliación de S (fig. 1).

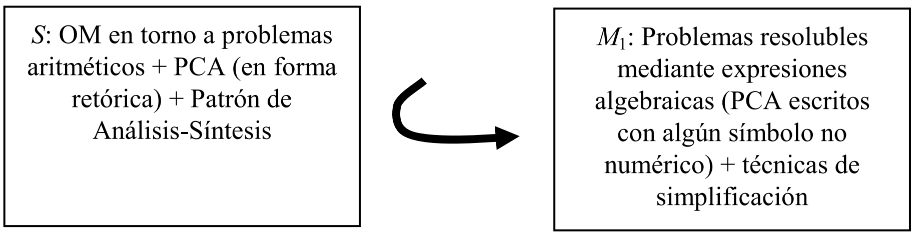

Figura 1. Primera etapa del proceso de algebrización.

En efecto, en M_1 también se pueden resolver problemas del mismo tipo que P_0 pero que no pueden abordarse estrictamente en S porque requieren un primer trabajo de “simplificación” del PCA asociado antes de aplicar el

abstracción del dominio **D** en el que ambos PCA toman el mismo valor numérico (siempre que esto no produzca confusión).

patrón de análisis-síntesis. Para ilustrarlo, consideremos el siguiente ejemplo, ejemplar del mismo tipo de problemas que P_1:

> P_1'. *Marta piensa un número. Le suma el doble de su consecutivo, le resta 17 al resultado y, por último, lo divide todo entre 3. Si el resultado final es 25, ¿se puede determinar qué número pensó Marta?*
>
> Sea n el número pensado (es decir, supongamos el problema resuelto). El cálculo que hace Marta se puede escribir como: PCA(n) = (n + 2(n + 1) – 17)/3. Utilizando las técnicas de simplificación, se puede transformar en el PCA equivalente: PCA(n) = (n + 2(n + 1) – 17)/3 = 3n – 5. Por lo tanto, P_1' se reduce a un problema resoluble en S que se puede formular como "Hallar un número tal que su triple menos 5 sea 25".

Los dos ejemplos considerados, P_1 y P_1', permiten poner en evidencia dos tipos particulares de cuestiones tecnológicas no resolubles en S y que se pueden abordar en el primer nivel de algebrización: por un lado, cuestiones relativas a la interpretación y justificación de la "forma" del resultado que se obtiene al ejecutar un PCA (es decir, a la producción de PCA equivalentes a uno dado) y, por otro, a la resolución de problemas para los que se requiere ampliar la técnica de análisis-síntesis mediante la simplificación previa del PCA. Éstas no son obviamente las dos únicas cuestiones tecnológicas planteables en S cuya resolución requiere trabajar en M_1 y, por lo tanto, acceder a la primera etapa del proceso de algebrización. Se pueden plantear por ejemplo cuestiones tecnológicas cuya respuesta requiere ampliar explícitamente el ámbito numérico subyacente a los problemas aritméticos considerados. En el trabajo de Eva Cid y Pilar Bolea (2010) se formulan algunas de dichas cuestiones y se muestra que los números negativos son imprescindibles desde la primera etapa del proceso de algebrización, deduciéndose la necesidad de introducirlos simultáneamente al instrumento algebraico.

2.3. Segunda etapa del proceso de algebrización

A continuación, y para ejemplificar las limitaciones e incompletitudes del trabajo en M_1, consideraremos el estudio no de un problema aislado sino del *tipo* de problemas al que éste pertenece, tomando como ejemplo el tipo de problemas cuya modelización en M_1 da lugar a PCA (o expresiones algebraicas) con una misma estructura. Mostraremos que este tipo contiene problemas no resolubles con las técnicas de M_1, requiriéndose así una nueva ampliación.

P_2. Marta piensa un número. Le suma el doble de su consecutivo, le resta 17 al resultado y, por último, lo divide todo entre 3. Si el resultado final es 4 unidades mayor que el doble del número pensado, ¿se puede determinar qué número pensó Marta?

Utilizando las técnicas presentadas anteriormente, podemos realizar los pasos siguientes:

Sea n el número pensado, el cálculo que hace Marta se puede escribir como:

$$\mathrm{PCA}(n) = n + 2(n + 1) - 17 = 3n - 15$$

En este caso, no conocemos el resultado de ejecutar este PCA y, por lo tanto, no se obtiene ninguna respuesta aplicando el patrón de análisis-síntesis. La condición del problema se expresa como una igualdad entre dos programas de cálculo: $\mathrm{PCA}_1(n) = 3n - 15$ y $\mathrm{PCA}_2(n) = 2n + 4$, que (supuestamente) se cumple para cierto valor de n.

Para determinar el valor de n para el cual dos PCA dados toman el mismo *valor numérico*, no basta con simplificar por separado cada uno de los PCA (de hecho, en este caso, ya están simplificados) y aplicar a continuación el Patrón de Análisis-Síntesis. Se requiere transformar globalmente la igualdad de los dos PCA, esto es, manipular este nuevo objeto matemático que se denomina "*ecuación*", mediante nuevas técnicas que constituyen el "*cálculo ecuacional*" y cuya operación fundamental es la "*restauración*" o *al-jabr*, palabra árabe que da nombre al álgebra, y que consiste en transformar simultáneamente los dos PCA (los dos miembros de la ecuación) para obtener una nueva ecuación (o igualdad de dos PCA) equivalente a la anterior. En nuestro ejemplo:

$$\begin{gathered} 3n - 15 = 2n + 4 \\ 3n - 15 + 15 = 2n + 4 + 15 \\ 3n = 2n + 19 \\ 3n - 2n = 2n + 19 - 2n \\ n = 19. \end{gathered}$$

Podemos considerar que el cálculo ecuacional, que transforma ecuaciones en ecuaciones equivalentes, constituye un desarrollo de las técnicas de M_1 puesto que: por un lado continúa utilizando las técnicas de simplificación de M_1 para simplificar los dos PCA por separado [4] y, por otro, porque el patrón

4. Ésta es la segunda operación sobre las ecuaciones que Al-Khwarizmi (780-850) designó por *al-muqabala.*

de análisis-síntesis también transformaba –a un nivel más elemental– una igualdad de PCA en otras igualdades de PCA.

De todas formas el paso de la simplificación de los PCA al cálculo ecuacional es suficientemente importante como para hablar de un *nuevo nivel de algebrización*, sobre todo si tenemos en cuenta que existen problemas resolubles en S y, de forma aún más económica, en M_1 que, al intercambiar un dato por una incógnita, se convierten en problemas no resolubles con las técnicas de M_1, ni siquiera, en algunos casos, mediante ecuaciones de *primer grado*. Un simple ejemplo nos permitirá ilustrar esta última afirmación. Consideremos el problema que consiste en determinar el área A de un triángulo isósceles dada su altura h y la longitud de los lados iguales c, problema que conduce a resolver el PCA(h, c) = $h\sqrt{c^2 - h^2} = A$. Si cambiamos este problema por el de hallar la altura h del triángulo isósceles dada el área A y la longitud de lados iguales c (intercambiando los papeles de A y h), entonces el problema no sólo no puede resolverse mediante las técnicas aritméticas, sino que da origen a una ecuación bicuadrada en h: $h^4 - c^2 h^2 + A^2 = 0$.

Aparece así un segundo modelo del sistema inicial S que, además de aumentar el nivel de algebrización, amplía fuertemente y completa relativamente M_1. Lo denominamos M_2 (fig. 2).

M_1: Problemas resolubles mediante expresiones algebraicas (PCA escritos con algún símbolo no numérico) + técnicas de simplificación	→	M_2: Problemas resolubles mediante “ecuaciones” (igualdades entre las expresiones algebraicas de dos PCA) + cálculo ecuacional

Figura 2. Segunda etapa del proceso de algebrización.

2.3. Tercera etapa del proceso de algebrización

Podemos seguir la dinámica iniciada planteando ahora cuestiones tecnológicas que no pueden resolverse en M_2. Una posible formulación general podría ser la siguiente: ¿Qué relación debe darse entre determinadas variables del sistema a fin de que se cumpla cierta propiedad del mismo? Por ejemplo, ¿Qué relaciones deben darse entre los datos de un problema aritmético para que el problema tenga solución? ¿Y para que la solución sea única? Dependiendo de la naturaleza del problema y del contexto en el que se formule, las cuestiones de este tipo pueden multiplicarse. La resolución de este tipo de cuestiones comporta una fuerte *generalización* del cálculo ecuacional al tiempo que amplía enormemente la clase a la que pertenece un problema aritmético. El problema siguiente permite un cuestionamiento del tipo anterior:

> P_3. *En un banco nos proponen el siguiente plan de inversiones: nos dan un 2% de interés cada trimestre y nos descuentan un 0,5% al final del año en concepto de comisión. ¿Cuál será el capital al final del año si la inversión inicial ha sido de 1000 €? ¿Y de aquí a 3 años? ¿Qué capital inicial se debería invertir para que triplique al final del año? ¿Qué porcentaje deberíamos negociar con el banco cada trimestre para duplicar el capital inicial a final de año? ¿Cuánto tiempo ha de pasar para que el capital inicial se triplique? Etc.*

Para resolver P_3 aparece la necesidad de llevar a cabo un proceso completo de modelización algebraica en el sentido que se describe en Chevallard (1989) y Gascón (1993, pp. 321-323). En el caso de realizar preguntas en relación al número de veces que se debe aplicar un interés o al tiempo que debe transcurrir para llegar a una situación concreta (el triple del capital inicial, etc.), aparece la necesidad de modelizar algebraicamente el sistema planteado recurriendo a técnicas algebraicas más sofisticadas: las fórmulas.

En el ejemplo considerado, el modelo que permite resolver, no solo las cuestiones planteadas anteriormente, sino futuras cuestiones a abordar, se sintetiza en la fórmula:

$$C_f = C_0\,(1 + r)^{kn}(1 - d)$$

donde C_0 es el capital inicial, C_f es el capital final obtenido, r es la rentabilidad que el banco nos ofrece (en el caso anterior $r = 0{,}01$), d es el descuento o comisión que el banco aplica (en el caso anterior $d = 0{,}005$), k es el número de veces que se aplica la rentabilidad en un año (en el caso anterior $k = 4$), n es el número de años transcurridos.

Tenemos, en definitiva, una nueva OM que designaremos M_3, que contiene M_2 y que constituye una completación relativa de ésta, al tiempo que debe considerarse como una OM más algebrizada puesto que acepta la unificación de los tipos de problemas, técnicas y elementos tecnológicos, incluye tareas relativas a la interpretación del resultado obtenido y hasta tipos de problemas cada vez más independientes del sistema inicial (fig. 3).

M_2: Problemas resolubles mediante "ecuaciones" (igualdades entre las expresiones algebraicas de dos PCA) + Cálculo ecuacional	M_3: Problemas cuya resolución requiere de una modelización algebraica + Técnicas de Modelización

Figura 3. Tercera etapa del proceso de algebrización.

En resumen hemos indicado cómo puede utilizarse el instrumento algebraico para llevar a cabo un proceso de algebrización progresivo (que hemos esquematizado en tres etapas sucesivas) de un sistema. Este planteamiento muestra además que la "razón de ser" del álgebra escolar no sólo permite simplificar extraordinariamente la solución aritmética "pura" (discursiva) mediante el cálculo ecuacional. Además, el álgebra como instrumento de modelización permite organizar entre sí problemas aparentemente distintos para obtener nuevos *tipos* de problemas, al tiempo que proporciona técnicas para responder a *cuestiones tecnológicas* relativas, por ejemplo, a la demostración de propiedades de la estructura de un tipo de problemas. Resulta, en definitiva, que con la culminación del proceso de algebrización se transforma completamente la actividad matemática.

3. La introducción del instrumento algebraico a partir de la modelización de un sistema aritmético: los "*juegos de magia matemática*"

Presentaremos aquí algunos elementos de una experimentación llevada a cabo durante el curso 2006/07 con alumnos de 2º y 3º de secundaria (13-14 y 14-15 años) en el marco de un proyecto de investigación educativa centrado en la introducción del lenguaje algebraico con la calculadora simbólica Wiris[5]. Las propuestas de enseñanza que se experimentaron tenían como principal objetivo iniciar a los alumnos de la primera etapa de la ESO en el uso funcional del instrumento algebraico proponiendo como sistema a estudiar una clase determinada de problemas aritméticos y llevando a cabo el proceso de estudio guiado por las sucesivas etapas de algebrización que

5. Por razones de espacio, omitiremos en lo que sigue la problemática del uso de la calculadora simbólica Wiris, que es un software matemático de acceso libre en la red (www.wiris.com). Para más detalles, véase Ruiz, Bosch & Gascón (2005 y 2007).

hemos esquematizado anteriormente. La experimentación realizada quedará enmarcada en el modelo M_2, no se llegará a desarrollar una actividad en M_3, es decir, la tercera etapa del proceso de modelización.

Recordemos que todo proceso de modelización matemática debe iniciarse *delimitando el sistema*[6] a modelizar y *explicitando las cuestiones problemáticas* que provocan inicialmente la necesidad de llevar a cabo el proceso de modelización. Esta delimitación constituye una verdadera "construcción" del sistema a modelizar que nunca viene dado de antemano ni puede construirse definitivamente de una vez por todas. En cuanto a las cuestiones problemáticas citadas, pueden considerarse como la "razón de ser" del primero de los modelos que aparecerán puesto que éste se construye precisamente para dar respuesta a dichas cuestiones.

Tomaremos como *sistema matemático inicial* una pequeña parte del sistema de los problemas aritméticos, limitándonos a aquellos cuyo PCA asociado, una vez simplificado, puede expresarse simbólicamente en la forma canónica:

$$\{\mathrm{PCA}(n) = an + b;\ n \in N;\ a, b \in Q\}$$

En el sistema S inicialmente considerado, los PCA son sólo *procesos* de cálculo que se ejecutan. Para provocar la transición de S a M_1, primera etapa del proceso de algebrización, hay que plantear cuestiones problemáticas que requieran considerar los PCA como *objetos* que se manipulan como un todo. Como hemos visto anteriormente, el uso funcional del instrumento algebraico requiere poder situarse en M_1 de manera habitual, pero no creemos que el tránsito de S a M_1 sea inmediato ni "espontáneo". Para ello, utilizaremos un tipo de problemas aritméticos formulados en un contexto particular y cuya resolución requiera de manera casi imprescindible el trabajo en M_1.

Para ello consideramos un cierto tipo de "juegos de magia matemática" que se basan en la ejecución de un PCA dictado por un "mago". Existen dos modalidades de juego:

– Piensa un número y ejecuta el PCA que dicta el mago. Éste adivinará el resultado de la ejecución del PCA sin conocer el número pensado (ejemplo P_1 de la sección 2.1).

6. Se considera que un *sistema* modelizable matemáticamente es cualquier ámbito de la realidad, sin ningún tipo de restricción, siempre que pueda ser aislado del resto –aunque sea hipotéticamente–. En esta noción de "sistema" se incluyen muy especialmente los sistemas matemáticos.

– Piensa un número y ejecuta el PCA que dicta el mago. Si le dices el resultado obtenido, el mago adivinará el número pensado.

> Ejemplo: Se pide a una persona que escriba en un papel su edad. Debajo de dicho número debe escribir el número mágico 90. A continuación debe sumar ambos números. Del resultado obtenido debe tachar la última cifra de la izquierda y trasladarla bajo el último número escrito. Por último realizará la suma entre estos dos números. Al conocer el resultado final, el mago deducirá inmediatamente la edad de dicha persona [7].

En ambas modalidades, para explicar el "truco del mago" hay que responder a cuestiones tecnológicas que requieren la construcción y el trabajo en un modelo algebraico de los PCA considerados, abarcando, al menos, la primera etapa del proceso de algebrización. En el caso de la experimentación que aquí presentamos, tomamos ambos modalidades de estos juegos de magia como punto de partida de un proceso de estudio para iniciar a los alumnos en el uso funcional del instrumento algebraico.

3.1. La simplificación como técnica explicativa

La cuestión problemática inicial (que hace el papel de *cuestión generatriz* del proceso de estudio) puede formularse en los siguientes términos:

> Q_1**:** Dado un conjunto de juegos en los que el "mago" adivina el resultado de la ejecución del PCA sin conocer el número pensado ¿cómo explicar el "truco" que emplea el mago? ¿Cómo construir nuevos juegos de magia para proponer a los compañeros?

A partir de la indicación "Piensa un número" se plantean juegos como los siguientes:

> – Al número pensado, sumar el doble del número, sumar luego 75, dividir el resultado por 3 y restar el número pensado. ¡El resultado es 25!
>
> – Multiplicar el número pensado por 4, al resultado sumarle 684, dividir el resultado por 2 y restarle el doble del número pensado. ¡El resultado es 342!

Para dar respuesta a la cuestión Q_1, aparece la necesidad de *expresar por escrito* el PCA para poder manipularlo y descubrir el truco. Después de los primeros intentos, se pone de manifiesto la importancia de que la expresión escrita del PCA no dependa del número concreto pensado, ya que el resultado final no depende de éste. De todas formas, los alumnos se

7. El "truco" del mago consiste en sumar 9 al resultado final dado.

convencen de dicha independencia ejecutando el PCA con algunos números concretos y a partir de estos resultados particulares aceptan sin ningún reparo que la conclusión final es verdad para cualquier valor de n. La secuencia de técnicas que permite escribir los PCA es la siguiente: operar paso a paso el PCA y, a continuación, escribir en línea todas las operaciones para calcular el resultado en un único paso.

En estos juegos de magia, el PCA asociado es equivalente a uno del tipo $\mathrm{PCA}(n) \equiv b$. Para descubrir el truco es necesaria la manipulación del programa de cálculo mediante *simplificación* que se convierte así en una *herramienta explicativa* y no en una tarea sin sentido para el alumno, como ocurre normalmente en la mayor parte de manipulaciones que se llevan a cabo a lo largo de la ESO. El trabajo matemático se enmarca plenamente en M_1, esto es, en la *primera etapa del proceso de algebrización*.

A continuación presentamos un ejemplo de cómo la técnica de simplificación permite efectivamente descubrir el truco de magia en el primer caso considerado:

> Piensa un número, súmale el doble del número, divide el resultado por 3, resta ahora el número pensado y súmale 75. ¿El resultado es siempre 75? ¿Por qué?
>
> – Simplificación verbal: un número más el doble de este número es tres veces el número, ahora si dividimos por 3, esto da el número pensado inicialmente. Si a continuación restamos el número pensado nos quedamos sin nada y al sumarle 75 da como resultado final 75.
>
> – Simplificación algebraica: sea n el número pensado, el programa de cálculo propuesto se puede expresar como: $\mathrm{PCA}(n) = (n + 2n)/3 - n + 75 = (3n)/3 - n + 75 = n - n + 75 = 75$.

La necesidad de asignar un símbolo al argumento del PCA aparece cuando la secuencia de operaciones requiere un “largo” proceso de simplificación. En este caso la simplificación verbal se convierte en una técnica costosa, poco económica y hasta casi impracticable.

Una vez caracterizados los PCA asociados a los juegos de magia de este primer tipo ($\mathrm{PCA}(n) \equiv b$), se está en condiciones de empezar a abordar un nuevo tipo de tareas que consiste para el alumno en inventar juegos propios y dictarlos a los compañeros. Esta tarea permite institucionalizar la *técnica de cancelación* surgida para explicar los trucos de los juegos anteriores y que aparece ahora aquí como una herramienta productiva de juegos:

$$n - n = 0 \quad \text{y} \quad n/n = 1$$

También es imprescindible para llevar a cabo esta nueva tarea dominar la *técnica de verbalización* de los PCA, esto es, la técnica que permite enunciarlos verbalmente.

3.2. Primeras limitaciones de la técnica de análisis-síntesis

El recorrido de estudio continúa introduciendo una nueva cuestión problemática que puede considerarse como un desarrollo de Q_1:

> Q_2: Dado un conjunto de juegos en los que el "mago" adivina el número pensado por el alumno a partir del resultado de la ejecución del PCA, ¿cómo explicar el "truco" que emplea el mago en dichos juegos? ¿Cómo construir nuevos juegos de este tipo para proponer a los compañeros?

Algunos ejemplos de este nuevo tipo de tareas podrían ser los siguientes:

> *Tarea 1*. Si a un número le sumo el consecutivo del número pensado, al resultado le sumo el triple del número que pensé, le sumo el consecutivo del número inicial y al resultado le sumo 6, me da 1544. ¡Adivina qué número pensé!
>
> *Tarea 2.* Si a un número le resto 1, multiplico el resultado por 3, le sumo el número que pensé, le sumo 3 y lo divido todo por 4 me da 13. ¡Adivina el número que pensé!
>
> *Tarea 3.* Si al cuádruplo de un número le sumo 60, al resultado le sumo el doble del número que pensé, divido el resultado por 6 y le resto el número que pensé me da 88. ¡Adivina el número que pensé!
>
> *Tarea 4.* Si a un número lo multiplico por 4, al resultado le sumo 689, lo divido todo por 2 y le resto el doble del número que pensé me da 344,5. ¡Adivina el número que pensé!

Aparece, como en el caso, anterior la necesidad de escribir simbólicamente los PCA, lo que significa situarse en M_1. En efecto, se requiere escribir en línea todas las operaciones puesto que, formalmente, se trata de comparar dos PCA no equivalentes (PCA_1 y PCA_2) donde $PCA_2(n)$ tiene una forma canónica del tipo $PCA_2(n) \equiv d$ o bien $PCA_2(n) \equiv n$.

Usando la *técnica de ensayo-error* podemos ejecutar el programa de cálculo $PCA_1(n)$ con algunos números concretos, pero esta técnica es poco económica y puede llevarnos mucho tiempo antes de llegar a la solución, suponiendo que ésta exista. Para resolver este tipo de cuestiones es más eficaz aplicar la combinación de la *técnica inversa* (*o de análisis-síntesis*) y de la *técnica de simplificación*. Estas técnicas pueden considerarse el germen de las técnicas ecuacionales. A continuación mostramos ejemplos de cómo la combinación entre la técnica inversa y la de simplificación permite descubrir el truco de magia:

Problema 1. Denotaremos por n el número pensado, el PCA propuesto se puede expresar como:

$$PCA_1(n) = n + (n + 1) + 3n + (n + 1) + 6$$

Usando la técnica de simplificación algebraica, se tiene: $PCA_1(n) = 6n + 8$ que, mediante la técnica inversa permite obtener el resultado $n = 256$ (ver apartado 2.2).

Si el número encontrado hubiese sido decimal, aparecería la cuestión del *dominio de pertenencia* de los números. En efecto, para poder considerar *el consecutivo* de un número, es necesario que el número sea entero. Por lo tanto, la respuesta hubiese sido que no existe ningún número (natural) que dé como resultado el valor 1544.

Problema 2. En este caso, se tiene $PCA_2(n) = ((n - 1)3 + n + 3)/4 = n$ y se obtiene $13 = n$.

Problema 3. Aquí tenemos: $PCA_3(n) = (4n + 60 + 2n)/6 - n = 10$ y, por lo tanto, no existe ningún número que al hacerle las operaciones anteriores dé 88, ya que para cualquier número pensado el resultado será siempre 10.

Problema 4. En este caso, el PCA asociado es: $PCA_4(n) = (4n + 689)/2 - 2n = 344{,}5$ y, por lo tanto no podemos descubrir el valor del número pensado.

En este punto aparece de nuevo un cuestionamiento tecnológico en torno a las *condiciones de existencia de solución*, rango posible para los parámetros, relaciones entre los parámetros y las incógnitas. Una vez catalogados los PCA asociados a este segundo tipo de "juegos de magia", se observan dos casos genéricos:

$$PCA(n) \equiv b \text{ o bien } PCA(n) \equiv n$$

Estamos en condiciones de proponer la tarea de construir o inventar juegos propios y proponerlos a los compañeros. A partir de juegos muy sencillos como

$$PCA(n) = n + 50 - n \equiv 50 \quad \text{o bien} \quad PCA(n) = n\,(50/n) \equiv 50,$$

se pueden construir PCA equivalentes de expresión inicial más compleja. Como hemos indicado anteriormente, las técnicas necesarias para este trabajo de "complicación" de las expresiones de un PCA se basan esencialmente en la cancelación de términos y en las propiedades de las operaciones inversas (suma y resta, multiplicación y división).

3.3. Comparar dos PCA: introducción al uso funcional del cálculo ecuacional

Esta tarea de producción de "juegos de magia" consiste en plantear el problema de determinar si dos PCA son equivalentes en un dominio determinado (P(n) ≡ Q(n)) o sólo coinciden para determinados valores de n (P(n_0) = Q(n_0) para algún n_0). El problema surge generalmente de forma espontánea cuando algún alumno propone un juego de magia del primer tipo que sólo es válido para el número que él ha pensado, por ejemplo al pretender que $(2n + 5n + 20)/5 \equiv 11$ cuando, en realidad, la igualdad sólo es válida para $n = 5$. El proceso de estudio sigue entonces considerando la cuestión:

> Q_3: Dados dos PCA, P(n) y Q(n), ¿cómo decidir si son *equivalentes* en un dominio numérico determinado o no lo son? En el caso de que no sean equivalentes, ¿cómo determinar, si existe, algún valor n_0 para el que P(n_0) = Q(n_0)? Y, en cualquier caso, ¿cómo establecer el dominio del argumento n para el cual se cumple la relación $P(n) \lesseqgtr Q(n)$?

Para responder a esta cuestión no es suficiente con la comprobación para algunos casos particulares. Si nos restringimos al caso en que los dos PCA puedan *simplificarse separadamente* hasta expresarse en la forma canónica elemental $an + b$, entonces el trabajo de decidir si son o no equivalentes puede llevarse a cabo simplemente comparando las dos formas canónicas, sin salirse de M_1 y sin entrar en M_2 que constituye el ámbito de la *segunda etapa del proceso de algebrización*. En el caso en que los PCA no sean equivalentes, entonces la simplificación por separado de ambos PCA no es suficiente y el necesario recurso al cálculo ecuacional sitúa la actividad en la segunda etapa del proceso de algebrización. Esto sería mucho más evidente en el caso en que los PCA no puedan expresarse en la forma canónica $a \cdot n + b$.

En este momento se empiezan a construir de manera funcional las técnicas ecuacionales que modifican profundamente el uso de los signos y, en particular, el significado del ostensivo "=", entendido hasta el momento como indicador del resultado de ejecutar un PCA y que pasa ahora a representar un *cierto tipo de equivalencia* entre dos PCA.

Proponemos a continuación algunas tareas concretas que pueden llevarse a cabo para introducir el uso funcional del cálculo ecuacional:

> *Tarea 1. ¿Es posible que si al número pensado le sumamos 10, le restamos 25, el resultado lo multiplicamos por 2, le restamos 3, después lo dividimos*

todo por 3 y le sumamos 9, de el mismo resultado que si al número pensado lo dividimos por 3, le sumamos 18, le restamos 16, el resultado lo multiplicamos por 2 y, finalmente, le restamos 6 a todo?

Denotaremos por n el número pensado, los PCA propuestos se pueden expresar como:

$$P(n) = ((n + 10 - 25)2 - 3)/3 + 9 \quad \text{y} \quad Q(n) = ((n)/3 + 18 - 16)2 - 6$$

Usando la técnica de simplificación separadamente para cada PCA hasta llegar a una expresión canónica del tipo $a{\cdot}n + b$: $P(n) = 2{\cdot}n/3 - 2$ y $Q(n) = 2{\cdot}n/3 - 2$. Ambos PCA tienen la misma forma canónica, por lo tanto *son equivalentes* en el dominio de los números naturales y la ejecución de los dos PCA dará el mismo resultado.

Tarea 2. ¿Es posible que si al doble de un número le sumo 10, le resto 3 y divido el resultado por 2, dé cómo resultado el siguiente del número de partida?

Denotaremos por n el número pensado, los PCA propuestos se pueden expresar como: $P(n) = n + 3{,}5$ y $Q(n) = n + 1$. Los dos PCA no tienen la misma forma canónica por lo tanto *no son equivalentes* en el dominio de los números naturales. Podemos ahora preguntarnos si existe algún valor $n_0 \in \mathbf{N}$ para el que $P(n_0) = Q(n_0)$. La respuesta en este caso puede realizarse a partir de los criterios de orden de los PCA [8], obteniéndose que $P(n) > Q(n)$ $(\forall n \in \mathbf{N})$ por lo que no existe ningún valor para el cual el resultado de los dos PCA sea el mismo.

Tarea 3. ¿Es posible que si a un número le sumo 5, al resultado le sumo el triple del número inicial, al resultado lo multiplico por 2, le sumo 2 y al resultado le sumo de nuevo el número inicial, de el mismo resultado que si al número inicial le sumo 2, al resultado lo multiplico por 9, le sumo 43, le sumo 2, lo divido todo por 3 y al resultado le sumo 3?

Denotaremos por n el número pensado y usando la técnica de simplificación separadamente para cada PCA hasta llegar a una expresión canónica del tipo $an + b$, se observa que P y Q no tienen la misma forma canónica y, por lo tanto, no son PCA equivalentes. De nuevo, podemos preguntarnos si existe algún valor n_0 para el que $P(n_0) = Q(n_0)$. La novedad de este ejemplo consiste

8. El criterio de orden puede formularse como sigue: diremos que ($an + b$ es mayor que $cn + d$) si y sólo si (($a > c$ y $b \geq d$) o bien ($b > d$ y $a \geq c$)). Se denota mediante ($an + b > cn + d$). El hecho (didáctico) de que los alumnos utilizaran este criterio cuando abordaron por primera vez la cuestión de la comparación de dos PCA puede interpretarse como reflejo o "síntoma" de un fenómeno didáctico general que hemos denominado "*evitación del álgebra*" y que ha sido estudiado en el caso de la proporcionalidad (Bolea, Bosch & Gascón, 2001).

en que las propiedades del orden parcial de los PCA elementales no resuelven el problema y, además, el fracaso de la técnica inversa es de tal magnitud que requiere una importante modificación que dará origen a la introducción de la técnica ecuacional y, en definitiva da sentido al trabajo en M_2 (ver apartado 2.2).

Llegados a este punto, el proceso de estudio que estamos describiendo puede tomar diferentes rumbos que sólo describiremos brevemente en este trabajo. Una posible continuación consistiría en partir de la comparación de dos PCA utilizando las técnicas gráficas para justificar los resultados obtenidos (los PCA aceptan una representación gráfica) y empezando así el estudio de ciertas funciones y el tratamiento de las desigualdades gráficamente. También podría proponerse el estudio de las reglas de divisibilidad de los números, llevar a cabo un trabajo en el que se utilizara la descomposición compleja de un número ($n = 100a + 10b + c$) para abordar problemas de múltiplos y divisores, etc. En cualquier caso, el paso a la *tercera etapa de algebrización* (que puede hacerse por múltiples caminos) supondrá un cambio radical de la actividad matemática y, la puerta de entrada a la modelización algebraico-funcional.

4. Conclusiones y cuestiones abiertas

Hemos mostrado, tomando como ejemplo particular la OM en torno a un tipo de problemas aritméticos elementales, cómo podrían materializarse las sucesivas etapas del proceso de algebrización y cuáles podrían ser algunas de las cuestiones que generen y guíen el correspondiente proceso de estudio. La razón de ser de las sucesivas etapas del proceso de modelización algebraica proviene siempre de la necesidad de responder a cuestiones que no se pueden responder en la etapa anterior. Por lo tanto, el uso funcional del instrumento algebraico provoca la *completación relativa* y *ampliación progresiva* de las OM estudiadas.

El sistema *S* que hemos considerado (cierto tipo elemental de problemas aritméticos) retoma una actividad realizada por los alumnos en una etapa educativa anterior, dando legitimidad escolar al trabajo que se pretende iniciar y permite salvar algunas de las restricciones institucionales con las que topa el desarrollo del proceso de algebrización de la matemática escolar (Bolea, Bosch & Gascón, 2004). Podría considerarse el sistema inicial *S* como un punto de partida bastante "natural" (por su sencillez y economía) para acceder a las diferentes etapas del proceso de algebrización. El paso de la primera a la segunda etapa de dicho proceso puede considerarse como la introducción de los alumnos al uso funcional del cálculo ecuacional y, por tanto, debe proponerse a los alumnos que todavía no han utilizado dicho cálculo: los del primer ciclo de la Educación Secundaria Obligatoria (ESO) en el sistema educativo español.

El acceso a la tercera etapa del proceso de algebrización debería ser el resultado de la confluencia del estudio de sistemas de diferente naturaleza: geométricos, funcionales, estadísticos, económicos, físicos, etc. y no sólo aritméticos. Creemos que el trabajo en la tercera etapa de algebrización requiere que los alumnos tengan un domino robusto del cálculo ecuacional y hasta de ciertas técnicas algebraicas que van más allá de dicho cálculo. Recordemos que nuestro propósito principal en este trabajo era responder al problema didáctico de la *iniciación* de los alumnos de la ESO en el *uso funcional del instrumento algebraico*. Dejamos para trabajos posteriores el estudio sistemático de las relaciones entre el proceso de algebrización, la desarticulación de la matemática escolar, las discontinuidades matemáticas y didácticas entre las diferentes etapas educativas y, en particular, las restricciones que dificultan el desarrollo de la modelización algebraico-funcional en el paso de la ESO al Bachillerato. [9]

Referencias

Bolea, P. (2003). *El proceso de algebrización de organizaciones matemáticas escolares*. Zaragoza, España: Prensas Universitarias de Zaragoza.

Bolea, P., Bosch, M. & Gascón, J. (2001). La transposición didáctica de organizaciones matemáticas en proceso de algebrización: El caso de la proporcionalidad. *Recherches en didactique des mathématiques, 21*(3), 247-304.

Bolea, P., Bosch, M. & Gascón, J. (2004). Why is modelling not included in the teaching of algebra at secondary school? *Quaderni di ricerca in didattica, 14*, 125-133.

Chevallard, Y. (1984). Le passage de l'arithmétique à l'algébrique dans l'enseignement des mathématiques au collège. Première partie. L'évolution de la transposition didactique. *Petit x, 5*, 51-94.

9. Trabajo realizado en el marco del proyecto de investigación EDU2008-02750/EDUC del Ministerio de Ciencia e Innovación de España.

Chevallard, Y. (1989). Le passage de l'arithmétique à l'algèbre dans l'enseignement des mathématiques au collège. Deuxième partie. Perspectives curriculaires : la notion de modelisation. *Petit x, 19*, 45-75.

Chevallard, Y. (1990). Le passage de l'arithmétique à l'algébrique dans l'enseignement des mathématiques au collège. Troisième partie. Voies d'attaque et problèmes didactiques. *Petit x, 23*, 5-38.

Chevallard, Y. (2002). *Séminaire de didactique des mathématiques pour les PCL2, année 2001-2002*. IUFM d'Aix-Marseille.

Cid, E. & Bolea, P. (2010). Diseño de un modelo epistemológico de referencia para introducir los números negativos en un entorno algebraico. En A. Bronner, M. Larguier, M. Artaud, M. Bosch, Y. Chevallard, G. Cirade & C. Ladage (Eds.), *Diffuser les mathématiques (et les autres savoirs) comme outils de connaissance et d'action* (pp. 575-594). Montpellier: IUFM.

Gascón, J. (1993). Desarrollo del conocimiento matemático y análisis didáctico: Del patrón análisis-síntesis a la génesis del lenguaje algebraico. *Recherches en didactique des mathématiques, 13*(3), 295-332.

Gascón, J. (1995). Un nouveau modèle de l'algèbre élémentaire comme alternative à l'« arithmétique généralisée ». *Petit x, 37*, 43-63.

Gascón, J. (1999). La naturaleza prealgebraica de la matemática escolar. *Educación matemática, 11*(1), 77-88.

Ruiz, N., Bosch, M. & Gascón, J. (2007a). Modelización funcional con parámetros en un taller de matemáticas con WIRIS. En L. Ruiz-Higueras, A. Estepa & F. J. García (Eds.), *Sociedad, escuela y matemáticas. Aportaciones de la teoría antropológica de lo didáctico (TAD)* (pp. 677-702). Jaén, España: Publicaciones de la Universidad de Jaén.

Ruiz, N., Bosch, M. & Gascón, J. (2007b). The functional algebraic modelling at Secondary level. En D. Pitta-Panzati & G. Philippou (Eds.), *Proceedings of the Vth Congress of the European Society for Research in Mathematics Education* (pp. 2170-2179). Nicosia, Chipre: Cyprus University Press.