“Cómo hacer una previsión de ventas”: propuesta de recorrido de estudio e investigación en un primer curso universitario de administración y dirección de empresas

Lídia Serrano y Marianna Bosch
Universitat Ramon Llull, España

Josep Gascón
Universitat Autònoma de Barcelona, España

Abstract. We present a proposal of a “research and study course” (RSC) that has been experimented with first year students in a Faculty of Economics in Barcelona (Spain). The “a priori” and “a posteriori” analysis of the experimental process helps clarify some basic components of the university didactic ecology of the RSC, especially those aspects related to the “media and milieu dialectics”. Both the detected restrictions in the implementation of the new didactic contract and the potentials of the generating question are at the basis of the design of a new RSC, implemented during the year 2007/08.

Résumé. Nous présentons une proposition de « parcours d’étude et de recherche » (PER) qui a fait l’objet d’une première expérimentation avec des étudiants de première année d’une faculté d’économie de Barcelone (Espagne). L’analyse *a priori* et *a posteriori* de cette expérimentation permet de mettre en évidence quelques traits fondamentaux de l’écologie didactique institutionnelle des PER, tout particulièrement ceux liés à la « dialectique des médias et des milieux ». Aussi bien les contraintes détectées dans la mise en place du nouveau contrat didactique que la potentialité de la question génératrice seront à la base de la préparation d’un nouveau PER à expérimenter pendant l’année 2007-2008.

Resumen. Presentamos una propuesta de “recorrido de estudio e investigación” (REI) que se ha experimentado con estudiantes de primer año de una facultad de economía de Barcelona (España). El análisis *a priori* y *a posteriori* de esta experimentación permite poner en evidencia algunos rasgos fundamentales de la ecología didáctica institucional de los REI, en particular aquellos ligados a la “dialéctica de los media y los medios”. Tanto las restricciones detectadas en la instauración del nuevo contrato didáctico como la potencialidad de la cuestión generatriz del recorrido sirven de base para el diseño de un nuevo REI a experimentar durante el curso 2007-2008.

Bronner, A., Larguier, M., Artaud, M., Bosch, M., Chevallard, Y., Cirade, G. & Ladage, C. (Éds)
Diffuser les mathématiques (et les autres savoirs) comme outils de connaissance et d’action (pp. 835-857)
II[e] congrès international sur la TAD (Uzès, 31 oct.-3 nov. 2007)
Axe 4. *La dialectique des médias et des milieux*

© 2010 – IUFM de l’académie de Montpellier

1. La dialéctica de los media y los medios en la enseñanza universitaria

El contrato didáctico imperante en la enseñanza universitaria establece una división muy rígida entre las responsabilidades asignadas al profesor y aquellas que corresponden a los estudiantes. La misión del primero es enseñar –en el sentido de presentar o mostrar– a los estudiantes las praxeologías matemáticas que conforman el plan de estudios en vigor, empezando generalmente por el discurso tecnológico-teórico organizador de los componentes praxeológicos y acabando por el bloque práctico-técnico, generalmente introducido a modo de "aplicación" de los teoremas, conceptos o propiedades enunciados. Por su parte, los estudiantes deben aprender a activar los ingredientes praxeológicos que se les proporcionan hasta ser capaces de resolver por sí mismos ciertos tipos de problemas más o menos bien delimitados según los casos y con los que se tendrán que enfrentar el día del examen. Si pensamos la situación en términos de la *dialéctica de los media y los medios* que rige toda construcción del conocimiento matemático (y científico en general), podemos interpretar el papel del profesor como el del "media universal" e incluso único (a lo sumo "apoyado" por un pequeño conjunto de libros de texto o de materiales) que transmite o comunica a los estudiantes, de forma a la vez discursiva y mostrativa, aquellas respuestas praxeológicas (a cuestiones muy a menudo tácitas) que ellos deberán ser capaces de utilizar por sí mismos para elaborar nuevas respuestas a las cuestiones nuevas con las que se enfrentarán.

En cambio, el proceso de construcción y de puesta a prueba de las respuestas, así como el de hallar los medios más apropiados para el contraste, corre enteramente a cargo del estudiante, cuando no resulta totalmente inexistente. No es extraño que, en la cultura escolar a este nivel, el carácter experimental de las matemáticas quede reducido a su mínima expresión y se produzca, en este sentido, un enorme abismo entre la matemática enseñada por los investigadores y la matemática que ellos mismos construyen (Barquero, Bosch & Gascón, 2007, 2010). En el caso extremo de la ausencia de contraste, podemos incluso afirmar que es el profesor el que se asume el papel, no sólo de media sino de "*medio* universal", único garante en última instancia de la verdad matemática en la clase.

Siguiendo las líneas recientes de investigación que propone la teoría antropológica de lo didáctico, nos planteamos la necesidad de introducir en los sistemas de enseñanza universitarios procesos de estudio *funcionales*, donde los saberes no son "monumentos" que el profesor "enseña" a los estudiantes, sino herramientas materiales y conceptuales, útiles para estudiar y resolver situaciones problemáticas. Estos procesos se concretan en lo que Yves Chevallard (2004) denomina "recorridos de estudio e investigación" (REI), centrados en el estudio prolongado de cuestiones problemáticas que sean a la vez "vivas" y "fecundas", es decir, que requieran como respuesta la construcción de toda una secuencia de praxeologías completas y articuladas.

A diferencia de otras propuestas de ingeniería didáctica, el diseño de un REI debe mantenerse abierto en el sentido siguiente: no se determinan a priori el tipo de organizaciones matemáticas (OM) a las que se puede recurrir para elaborar una respuesta a la cuestión generatriz considerada, aunque sí hay un análisis previo de la potencialidad de la cuestión inicialmente abordada. En otras palabras, al inicio de un REI, ni el profesor ni el ingeniero didacta saben cuál será el recorrido específico que seguirá la comunidad de estudio, aunque sí se conozca un conjunto amplio de posibles caminos por recorrer. Esta apertura inicial es necesaria para que la cuestión inicial "prime" sobre la respuesta que se le debe aportar y no se convierta, como ocurre muchas veces, en el simple pretexto para la construcción de los saberes que proporcionarían la respuesta.

Nuestra investigación se sitúa en un primer curso de matemáticas para ciencias económicas y empresariales de una facultad de economía de Barcelona. El problema que planteamos se puede formular en las tres cuestiones siguientes:

(1) ¿Cómo diseñar procesos didácticos capaces de situar las cuestiones problemáticas del mundo de la economía y la empresa en el punto de partida del estudio, haciendo que estas cuestiones sean las generadoras de los contenidos matemáticos que se enseñan y, en consecuencia, permitan articularlos y mostrar su funcionalidad?

(2) El programa actual de primer curso de matemáticas se puede dividir en tres grandes ámbitos: el álgebra lineal, el cálculo diferencial e integral en una variable y en dos variables. ¿Cuáles serían en cada ámbito las cuestiones generadoras (generatrices) más apropiadas para motivar la construcción de los diferentes contenidos matemáticos y cuáles son las organizaciones didácticas más adecuadas en cada caso?

(3) La enseñanza universitaria, como cualquier otro tipo de enseñanza, está sometida a restricciones transpositivas que delimitan el ámbito de actuación de la institución docente (y del profesor y los estudiantes en particular) y

permiten explicar las evoluciones, diferencias y regularidades que se presentan en las diferentes instituciones. ¿De qué manera la propuesta de nuevas organizaciones didácticas a diseñar e implementar podrán "resistir" a las actuales restricciones transpositivas?

La integración del sistema universitario español en el espacio europeo de enseñanza superior propugna una nueva metodología docente que reduce las horas de docencia directa (clases magistrales) y atribuye una mayor importancia a todo el proceso de aprendizaje del estudiante, que deberá asumir en consecuencia un rol más activo y participativo durante su proceso de formación. Esta reforma requiere pues un cambio en el contrato didáctico imperante actualmente que se ajusta a la nueva epistemología que subyace a los REI y creemos que orienta el sistema hacia nuevas condiciones más propicias para su implementación.

2. El Taller de Modelización Matemática

La experimentación didáctica que presentamos en este trabajo se integra, como hemos dicho anteriormente, en un primer curso de matemáticas para la Administración y Dirección de Empresas [1]. Cabe destacar de entrada que las condiciones de impartición de esta asignatura no corresponden a las de una enseñanza universitaria tradicional. En primer lugar, la universidad a la que nos referimos es una universidad privada que organiza las enseñanzas con grupos de estudiantes poco numerosos: entre 30 y 60 alumnos según los casos. En segundo lugar, el profesor responsable de elaborar el programa de la asignatura y concretar su contenido es un investigador en didáctica de las matemáticas que trabaja en el marco de la TAD. Finalmente, la experimentación que consideramos aquí se llevó a cabo durante un curso en el que, de los otros tres profesores, dos eran también investigadores en didáctica.

El objetivo principal de la asignatura, tal como consta en el programa vigente, es "que los estudiantes aprendan a elaborar y utilizar modelos matemáticos para la descripción, el análisis y la resolución de situaciones problemáticas que se dan en el ámbito de la empresa, la economía, las finanzas o la vida cotidiana. Para llegar a conocer las propiedades y principales usos de estos modelos matemáticos, es necesario familiarizarse con los principales tipos de situaciones económicas, empresariales y sociales

1. Facultad de Economía IQS de la Universidad Ramon Llull de Barcelona.

que éstos permiten representar. Pero no basta con saber adaptar y utilizar con precisión los modelos conocidos. Los alumnos deberán ser capaces de analizar una situación problemática en términos de dependencia entre magnitudes variables, destacando la información pertinente para elaborar un modelo matemático de dicha situación. Y deberán saber utilizar los modelos matemáticos propuestos y sintetizar los resultados obtenidos con estos modelos para generar nuevos conocimientos y cuestiones sobre las situaciones problemáticas consideradas."

Como ya hemos dicho, el programa se divide en tres grandes ámbitos o secciones que corresponden a los tres trimestres del año: álgebra lineal, cálculo diferencial e integral en una variable y cálculo diferencial en varias variables - optimización. El curso se estructura en dos sesiones semanales de dos horas de duración cada una de ellas. Generalmente en la primera de las sesiones se imparten las *clases teóricas* (explicaciones y resolución de problemas) y la segunda se dedica a la realización de un *taller de modelización matemática* centrado en el estudio de una cuestión problemática relacionada con la economía o la empresa y el temario del trimestre. El trabajo que presentamos versa sobre unos de los talleres experimentados, el que corresponde al segundo trimestre dedicado al cálculo diferencial e integral en una variable, que incluye cuatro temas: familias de funciones elementales; derivadas y cálculo de variaciones; problemas de modelización funcional y optimización; integrales y áreas.

El trabajo en el taller de modelización matemática se realiza en grupos de 3 ó 4 alumnos y requiere la entrega de un *informe semanal por grupo* con los resultados parciales obtenidos y un *informe final individual* al acabar el trimestre.

El sistema de evaluación es el siguiente:

– Un examen al final de cada trimestre en el que los estudiantes deben resolver un conjunto de problemas del mismo tipo de los estudiados en clase, que cuenta un 50% de la nota trimestral.

– La entrega de los informes en grupo e individuales realizados en el taller de modelización, que cuenta un 40% de la nota trimestral.

– El 10% restante corresponde a controles en clase y entregas de problemas resueltos.

2.1. Análisis *a priori*: carácter generador de la cuestión inicial

Para el *taller de modelización* del segundo trimestre del curso, partimos de la siguiente cuestión generatriz:

La empresa de software educativo TAD (*Tecnologías Aplicadas a la Docencia*) lleva un registro de las ventas trimestrales de 7 de sus principales productos durante los últimos 3 años. Nos encarga un informe sobre las cuestiones siguientes:

¿Qué ventas se pueden prever durante los próximos trimestres para cada producto? ¿Y para los próximos meses? Presentar una fórmula que permita calcular las previsiones y justificarla explicando las garantías y limitaciones de cada propuesta.

¿Para qué productos se prevén unas ventas con un crecimiento mayor al 10% trimestral? ¿Para cuáles se prevé un decrecimiento mayor al 12% anual?

Trimestre	P1	P2	P3	P4	P5	P6	P7
Marzo 2003	1890	1050	1375	1300	300	750	250
Junio 2003	1940	1100	1100	1105	800	740	270
Septiembre 2003	1970	1120	920	940	1050	735	290
Diciembre 2003	1980	1160	790	800	1200	730	315
Marzo 2004	1990	1200	690	680	1250	720	340
Junio 2004	1995	1250	610	580	1300	710	370
Septiembre 2004	2000	1300	550	490	1330	700	400
Diciembre 2004	2001	1360	500	420	1350	685	430
Marzo 2005	2004	1420	460	350	1370	670	460
Junio 2005	2015	1490	420	300	1380	650	500
Septiembre 2005	2030	1550	390	260	1390	635	540
Diciembre 2005	2060	1640	370	220	1400	615	580
Marzo 2006	2100	1720	340	185	1410	590	630
Junio 2006	2170	1810	325	160	1415	570	680
Septiembre 2006	2250	1900	310	135	1420	545	730
Diciembre 2006	2365	2000	290	115	1425	520	790
	Diccionario Español ingles	Juego simulación empresarial	Tutorial de programación	Videos ciencias naturales	Programa horarios centro	Calculadora gráfica numérica	Calculadora simbólica

Tabla 1.

Los datos de cada uno de los productos fueron "preparados" por los profesores de la siguiente forma. En una hoja de cálculo se calcularon 16 valores de las siete funciones elementales siguientes:

P1	P2	P3	P4
$0{,}5(x-6)^3+2000$	$2{,}5(x+5)^2+1000$	$\dfrac{5500}{x+4}$	$1300\cdot 0{,}85^x$

P5	P6	P7
$\dfrac{-1200}{x+1}+1500$	$-0{,}8(x+2)^2+750$	$250\cdot 1{,}08^x$

Tabla 2.

Se modificaron entonces ligeramente los valores de cada una de ellas para distorsionarlos un poco sin perder por ello la "tendencia" general de la función original. De este modo, los datos propuestos a los estudiantes no corresponden a ninguna función elemental.

El objetivo del taller era plantear a los estudiantes un problema muy próximo a las situaciones reales de previsión de ventas en el que las funciones aparecen como un posible modelo de trabajo. Dado el bagaje matemático y económico de los estudiantes del curso, ninguna técnica particular de previsión forma parte de su cultura. El uso de Excel en el primer trimestre del curso y su familiaridad con las familias de funciones elementales (tanto en el bachillerato como en las lecciones justo anteriores al taller) nos permitieron suponer que podrían detectar fácilmente una tendencia en las ventas (por ejemplo a partir de la representación gráfica) y modelizarla funcionalmente. La formulación de la cuestión del taller también introducía la idea de *variación porcentual* (anual y trimestral), lo que nos aseguraba que el estudio de la *variación de una función* apareciera durante el recorrido. Dado que el taller se realizaría en paralelo con las clases teóricas en las que se iba a abordar el tema de la derivada, era posible que, en algún momento, el estudio de la variación de las ventas se pudiera relacionar con el cálculo de derivadas.

De todos modos, la elección de una situación de previsión de ventas venía motivada principalmente por el hecho que permitía distinguir de manera clara y sencilla entre el *sistema económico* que se estudia (las ventas) y los *modelos* que se utilizan para el estudio (las funciones).

Además, el hecho de trabajar con distintos productos y distintos grupos de estudiantes posibilita la consideración de diferentes posibles modelos, facilitando así la emergencia del problema de la *adecuación entre el modelo y el sistema*. Dicho en otra palabras, el objetivo del taller era que los alumnos utilizaran las funciones como modelos de algún sistema económico simple y que se planteara la cuestión de la elección del modelo (¿Qué modelo es mejor? ¿Bajo qué criterios? Etc.) y de su validación en función de los datos considerados.

2.2. Condiciones de la experiencia

El taller se realizó de manera simultánea en cuatro grupos de primer curso de la licenciatura en administración y dirección de empresas y de la diplomatura en ciencias empresariales: aproximadamente unos doscientos alumnos en total. Fue experimentado por cuatro profesores distintos, que eran los profesores habituales de la asignatura, tres de los cuales forman parte de nuestro grupo de investigación en didáctica de las matemáticas. La duración del taller fue de cuatro o cinco sesiones semanales (según el grupo) entre enero y marzo del 2007. Cada sesión duraba dos horas, los alumnos trabajan en grupos de tres o cuatro y disponen todos de un ordenador portátil que han estado utilizando durante todo el curso. En general, los grupos trabajaban con uno o dos ordenadores.

Antes de iniciar el taller, se dedicaron cuatro sesiones de *clase teórica* a introducir las principales familias de funciones (que los alumnos ya han estudiado en secundaria): rectas, parábolas, cúbicas, hipérboles y exponenciales. El objetivo era que los alumnos supieran manejar la expresión general de cada familia de funciones y pudieran asociarla a distintos gráficos. En otras palabras, se enseñó a los alumnos cómo *asignar una expresión algebraica a la gráfica de una función* sabiendo previamente de qué familia se trata (recta, parábola, cúbica, etc.). Para ello se les explicó cómo deducir, a partir de la curva $y = f(x)$, la gráfica de la función $y = af(x - b) + c$ para valores concretos de a, b, c y, recíprocamente, cómo deducir la expresión de una función cualquiera $y = f(x)$ dada su gráfica y conjeturando previamente a qué familia pertenece la función.

Hemos comentado anteriormente que el taller de modelización se desarrollaba en paralelo con las clases de teoría. En ellas, y de manera simultánea a la realización del taller, se fueron introduciendo en clase las nociones de *variación absoluta* o *relativa* de una función entre dos puntos, de *derivada* de una función, de *recta tangente*, etc., dentro de la problemática general del estudio de las variaciones de una función entre dos variables, referidas siempre al caso de la modelización de magnitudes económicas: ingresos en función del número de ventas, costes en función de la producción, demanda en función del precio, etc.

El funcionamiento general del *taller* fue el siguiente. Los alumnos trabajaron en grupos de tres o cuatro y debían entregar en cada sesión un informe con una síntesis del trabajo realizado en la sesión anterior. Además, en cada sesión se nombraba un "secretario" de la clase cuya misión era recordar al principio de la siguiente sesión el trabajo colectivo realizado en la sesión anterior. Estas síntesis de los secretarios se ponían a disposición de todos los alumnos (de las cuatro clases) en la plataforma de internet de la asignatura. Al recordatorio del secretario, los distintos grupos podían añadir sus propias aportaciones y se decidía entre todos, guiados por las preguntas del profesor, qué dirección seguir en el estudio de la cuestión inicial. Como ya hemos dicho, una vez finalizado el *taller*, cada alumno de manera individual debía redactar un informe del recorrido realizado en su grupo, con el formato, comentarios y anotaciones que considerara apropiados. Cada profesor, al final de cada sesión, escribía un "informe de sesión" en el que explicaba el desarrollo concreto de la misma y lo enviaba a los demás profesores. Los informes semanales de los grupos, los informes individuales y los "diarios de sesiones" de los profesores conforman el material empírico del que disponemos para el análisis didáctico del *taller*. Paralelamente, los alumnos estaban cursando la asignatura de Informática en la cual se aprende a manejar la hoja de cálculo Excel. Este hecho economizó enormemente las explicaciones sobre el uso y manejo del programa Excel.

2.3. Descripción del taller y análisis a posteriori de las 4 experiencias

Primera Sesión. El profesor entregó la hoja con la cuestión generatriz y los datos, asignando a cada grupo de alumnos dos productos de la lista. Se dejó entonces a los grupos total libertad para explorar la cuestión y aportar una primera previsión para las ventas de los próximos trimestres. De forma mayoritaria, los distintos grupos decidieron entrar los datos en una hoja de cálculo de Excel y hacer la *representación gráfica de las ventas en función del tiempo*. Sólo en una de las cuatro clases, un grupo se puso a calcular las *variaciones trimestrales y anuales* de las ventas para hacer la previsión.

La mayoría de los grupos fueron capaces de asociar la representación gráfica obtenida con alguna de las familias de funciones estudiadas previamente en clase:

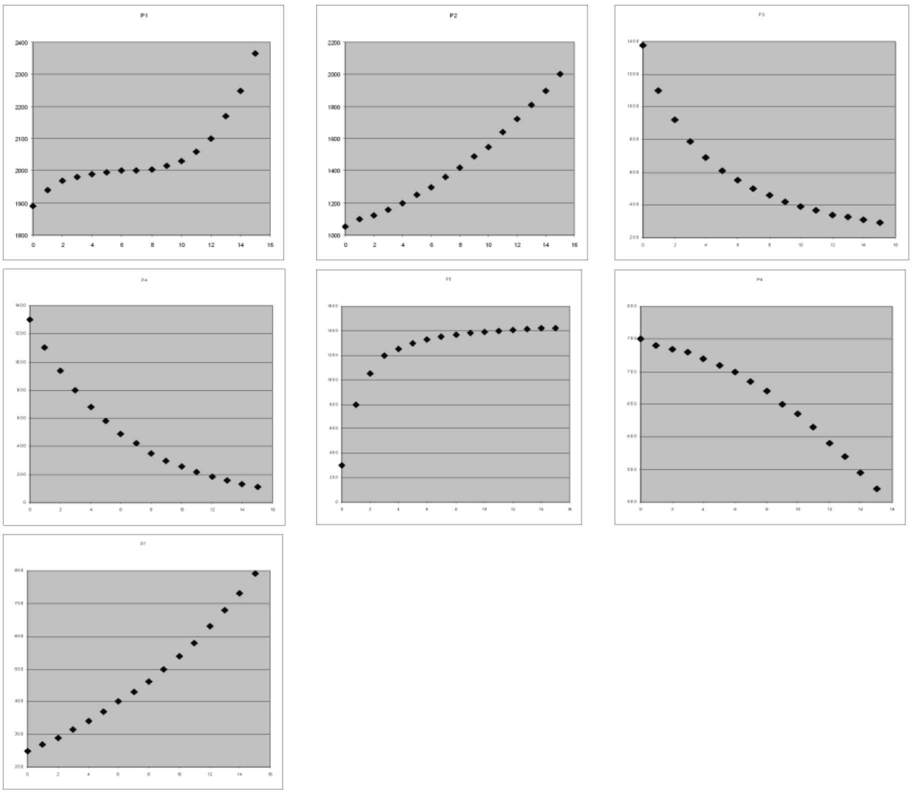

Figura 1.

Dependiendo del producto, asociar la gráfica con un tipo de función puede tener más de una opción. En todas las experiencias, el trabajo realizado por los grupos a quienes se les había asignado el producto 1 sirvió de guía para los demás, ya que es el caso más evidente: la forma de los datos sugiere una función cúbica y, guiados de forma bastante directa por el profesor, los alumnos acaban encontrando una expresión analítica del tipo $y = a(x - b)^3 + c$ bastante ajustada a los datos (detectando inicialmente el punto de inflexión $(b;c)$ y probando distintos valores del coeficiente de dilatación a. El profesor pidió a alguno de estos grupos que expusiera el procedimiento seguido y los resultados obtenidos al resto de la clase. El profesor propuso entonces una estructura de hoja de cálculo para unificar el trabajo de los diferentes grupos y pidió a los demás grupos que buscaran sus modelos de previsión:

$a =$	
$b =$	
$c =$	

	Tiempo	P1	$y = a(x-b)^3 + c$
Marzo 2003	0	1890	
Junio 2003	1	1940	
Septiembre 2003	2	1970	
Diciembre 2003	3	1980	
Marzo 2004	4	1990	
Junio 2004	5	1995	
…	…	…	

Tabla 3.

La sesión concluyó con la necesidad de hallar los parámetros del tipo de función considerado por cada grupo que mejor se ajustaran a los datos del producto. En algunos grupos el profesor pidió a los alumnos que buscaran más de un tipo de función para aproximar los datos. Quedó como trabajo pendiente para la siguiente sesión.

Segunda sesión. Los diferentes grupos presentaron las expresiones analíticas que habían obtenido para cada producto. Como era de prever, al tratar diferentes grupos un mismo producto, o bien habían escogido familias diferentes, o bien la misma familia pero obteniendo expresiones analíticas distintas. Se planteó entonces el problema de determinar cuál de las previsiones obtenidas era "mejor". Ante la imposibilidad de determinarlo a simple vista, sólo con las columnas de datos o sólo con las gráficas, un posible criterio introducido por el profesor fue el de calcular la "diferencia" entre los valores de la función considerada y los datos de cada producto. Se propuso entonces añadir una nueva columna a la plantilla de Excel y calcular la media aritmética de las diferencias en valor absoluto entre el valor dado y el obtenido, valor que, en algunos grupos, se designó como "*error cometido*" o "*error medio*". El objetivo de la sesión fue entonces el de encontrar, para cada producto y cada familia de funciones, la función que daba el menor error medio.

Los alumnos hicieron distintas pruebas y, a mitad de la sesión, el profesor les explicó cómo utilizar la herramienta de Excel "*solver*" que permite, precisamente, obtener la combinación de los parámetros a, b, c que minimiza el error medio, siempre y cuando los valores iniciales de los parámetros sean próximos a la solución.

a =	0,50
b =	6,03
c =	1999,98

	Tiempo	P1	$y = a(x - b)^3+c$	Error Absoluto
Marzo 2003	0	1890	1890	0,00
Junio 2003	1	1940	1936,15	3,85
Septiembre 2003	2	1970	1967,16	2,84
Diciembre 2003	3	1980	1986,03	6,03
Marzo 2004	4	1990	1995,79	5,79
Junio 2004	5	1995	1999,43	4,43
…	…	…	…	…
			Error medio	2,64

Tabla 4.

Se pidió a todos los grupos utilizar la función "*solver*" a partir de los resultados obtenidos, para encontrar en cada caso la expresión analítica que mejor aproximaba. En la gráfica se puede observar claramente como, en algunos casos, las aproximaciones pueden llegar a ser muy buenas.

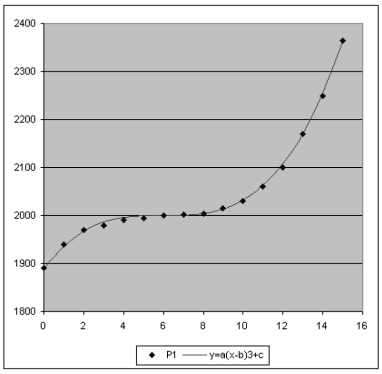

Figura 2.

La función "*solver*" permite encontrar la mejor aproximación en caso de haber diferentes propuestas dentro de la misma familia de funciones. Pero no es efectiva a la hora de decidir entre dos familias de funciones distintas, puesto que se pueden obtener errores medios parecidos cuyas diferencias sean atribuibles al azar. Además, dadas dos previsiones hechas con funciones de distinto tipo, el hecho que una previsión diera un error medio menor que otra no parecía siempre un buen criterio para determinar que la previsión fuera "mejor" puesto que no siempre coincidía con la apreciación gráfica: algunas funciones que parecían "coincidir" más con la gráfica podían dar errores sensiblemente mayores que otras que "coincidían" menos.

Se concluyó la sesión pidiendo que todos los grupos buscaran para la siguiente sesión como mínimo una expresión analítica para hacer una previsión de las ventas de cada uno de los siete productos de la lista.

Tercera sesión. Se inició la sesión haciendo de nuevo una puesta en común de las expresiones algebraicas trabajadas por cada grupo para cada producto. Para los diferentes productos en los que había coincidencia entre las familias de funciones, dada la precisión con la que actuaba la función "*solver*", las expresiones algebraicas coincidían bastante. El problema de la comparación de modelos de previsión se planteaba de todos modos en los casos en los que, para un mismo producto, se habían elegido diferentes familias de funciones con errores mínimos bastante parecidos: por ejemplo una función cuadrática y una exponencial para un caso de ventas crecientes.

En una de las clases, uno de los grupos de alumnos había utilizado inicialmente el cálculo de las variaciones trimestrales para hacer la previsión. Se decidió entonces aprovechar esta idea también con las demás clases. El profesor de esta clase propuso a este grupo que explicara su manera de proceder. En las demás clases, fue el profesor quien introdujo la propuesta de considerar una nueva variable además de las ventas: la tasa trimestral de variación de las ventas.

En la práctica, la propuesta consiste en añadir una columna a la hoja de cálculo para calcular la *tasa de variación (T.V.)* entre trimestres, a partir de los datos iniciales:

$a =$	0,50
$b =$	6,03
$c =$	1999,98

	Tiempo	P1	$y = a(x-b)^3 + c$	
Marzo 2003	0	1890	1890	T.V.
Junio 2003	1	1940	1936,15	50
Septiembre 2003	2	1970	1967,16	30
Diciembre 2003	3	1980	1986,03	10
Marzo 2004	4	1990	1995,79	10
Junio 2004	5	1995	1999,43	5
…….				

Tabla 5.

Si x es el trimestre considerado y $V(x)$ el valor de las ventas, se calcula la tasa absoluta de variación:

$$T.V.(x) = V(x) - V(x-1).$$

Se pidió a los estudiantes que procedieran con la nueva columna de la misma forma que con los datos iniciales, es decir, representarlos gráficamente, decidir a qué familia/s de funciones podían corresponder y encontrar la que diera una mejor aproximación.

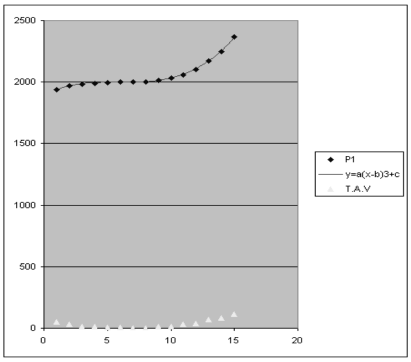

Figura 3.

En el caso del producto 1, que es el que hemos ido mostrando, al representar los puntos de la tasa de variación $T.V.$, los datos parecen poderse modelizar con una función cuadrática del tipo $y = a(x-b)^2 + c$. Mediante la elección de los parámetros a, b y c aproximados y la herramienta "*solver*", los alumnos podían encontrar fácilmente una propuesta de modelo.

$a =$	0,50
$b =$	6,03
$c =$	1999,98

$a =$	1,54
$b =$	6,57
$c =$	–0,14

Tiempo	P1	$y = a(x-b)^3 + c$	T.A.V	$y = a(x-b)^2 + c$	Error Abs
0	1890	1890			
1	1940	1936,15	50	47,50	2,50
2	1970	1967,16	30	31,93	1,93
3	1980	1986,03	10	19,43	9,43
4	1990	1995,79	10	10,00	0,00
5	1995	1999,43	5	3,64	1,36
				Error medio	3,21

Tabla 6.

Cuarta y quinta sesiones. Una vez los diferentes grupos de alumnos hubieron presentado sus propuestas de modelos para la *previsión de las ventas* y para la *previsión de las variaciones de las ventas*, el profesor planteó la cuestión de si existía alguna relación entre la expresión analítica del modelo de las ventas y la expresión que ajusta los datos de la *T.V.* Para los productos que sólo se había encontrado una expresión algebraica (por ejemplo, producto P1), sacar conclusiones resultó más complicado (las ventas se ajustan a una función cúbica y las variaciones a una cuadrática). En cambio, en aquellos productos para los que se disponía de más de un modelo (algunos de los cuales daban errores medios muy pequeños), el estudio de las variaciones permitía concluir que la gráfica que mejor ajustaba la *T. V.* “se parecía” a la gráfica de la función derivada de la función que mejor modelizaba el producto.

A modo de ilustración, consideraremos el producto 2:

	Tiempo	P2
Marzo 2003	0	1050
Junio 2003	1	1100
Septiembre 2003	2	1120
Diciembre 2003	3	1160
Marzo 2004	4	1200
Junio 2004	5	1250
………		

Tabla 7.

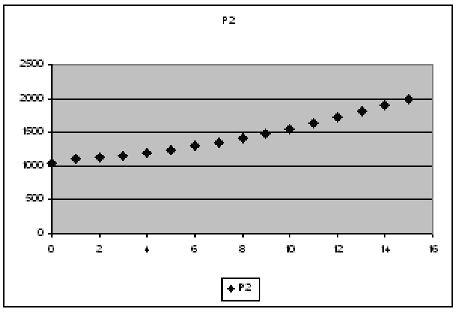

Figura 4.

Al hacer la representación gráfica de los datos, resulta que la tendencia de las ventas se podría modelizar con una recta, una exponencial o una parábola. Si consideramos estos tres tipos de modelos, se obtienen los siguientes errores medios:

	$a =$	60,9231585	
	$b =$	973,0270065	
T	P2	$y = ax+b$	Error absoluto
0	1050	973,03	76,97
1	1100	1033,95	66,05
2	1120	1094,87	25,13
3	1160	1155,80	4,20
4	1200	1216,72	16,72
…			
		Error medio	40,63

Tabla 8.

	$a =$	326,9560258	
	$b =$	1,095991712	
	$c =$	732,9617596	
			Error
T	P2	$y = ab^x + c$	absoluto
0	1050	1059,92	9,92
1	1100	1091,30	8,70
2	1120	1125,70	5,70
3	1160	1163,40	3,40
4	1200	1204,72	4,72
…			
		Error medio	7,16

	$a =$	2,461032595	
	$b =$	–5,178087668	
	$c =$	995,0134217	
			Error
T	P2	$y = a(x - b)^2 + c$	absoluto
0	1050	1061,00	11,00
1	1100	1088,95	11,05
2	1120	1121,82	1,82
3	1160	1159,61	0,39
4	1200	1202,32	2,32
…			
		Error medio	3,63

Tabla 9.

El estudio del error medio permite descartar como aproximación la recta, pero no proporciona un buen criterio de exclusión para la exponencial o la parábola. En cambio, si calculamos la *T.V.* y buscamos un modelo de esta nueva serie de valores, obtenemos lo siguiente:

Tiempo	P2	
0	1050	*T.V.*
1	1100	50
2	1120	20
3	1160	40
4	1200	40
5	1250	50
…		

Tabla 10.

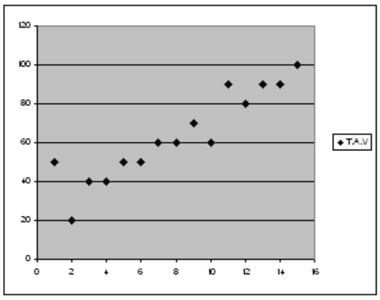

Figura 5.

		$a =$	5,0000008	
		$b =$	24,999974	
Tiempo	P2			
0	1050	T.V.	$y = ax + b$	Error Abs
1	1100	50	30,00	20,00
2	1120	20	35,00	15,00
3	1160	40	40,00	0,00
4	1200	40	45,00	5,00
…				…
			Error medio	5,67

Tabla 11.

		a =	–0,9915454	
		b =	–1,2772106	
		c =	61,073044	
Tiempo	P2			
0	1050	T.V.	$y=ab^x+c$	Error Abs
1	1100	50	62,34	12,34
2	1120	20	59,46	39,46
3	1160	40	63,14	23,14
4	1200	40	58,43	18,43
…				…
			Error medio	16,93

Tabla 12.

En este caso se observa que el error medio del modelo lineal es claramente inferior al obtenido con el modelo exponencial.

Resumiendo, se han encontrado dos familias de funciones que aproximan bastante bien los datos originales, cuyas expresiones analíticas, al tratarlas con la función "*solver*" son:

OPCIÓN 1:

$$y = 326{,}96\ (1{,}09)^x + 732{,}96 \rightarrow \textit{error}\text{: } 7{,}16$$

OPCIÓN 2:

$$y = 2{,}46\ (x - (-5{,}18))^2 + 995{,}01 = 2{,}46\ (x + 5{,}18)^2 + 995{,}01 \rightarrow \textit{error}\text{: } 3{,}63$$

La que menor error comete es esta última, la parábola.

Al trabajar con la tasa de variación, la expresión analítica de la función que mejor aproxima es: $y = 5x + 25$. Si ahora tomamos la expresión de la parábola $y = 2{,}46\ (x + 5{,}18)^2 + 995{,}01$ y la derivamos, obtenemos un valor parecido a este último modelo:

$$y' = 2{,}46 \cdot 2 \cdot (x + 5{,}18) = 5{,}2x + 26{,}936 \approx y = 5x + 25$$

Surge así un nuevo criterio para decidir cuál de las dos familias de funciones se ajusta mejor a un conjunto de datos: se estudia la tendencia de la tasa absoluta de variación *T.V.* y se elige como "mejor modelo" *la función cuya derivada coincida con el modelo de la T.V.*

Los grupos que pudieron dedicar cinco sesiones al desarrollo del *taller* trataron el tema de la relación entre el ajuste de las ventas y el ajuste de la variación de las ventas con mayor detalle, estableciendo sólo en la quinta sesión la relación entre el modelo de la variación de las ventas y la variación del modelo de las ventas, así como la relación entre este último y la derivada del modelo inicial. En particular, y gracias al hecho que los estudiantes disponían en el ordenador de un calculadora simbólica, estos grupos también pudieron calcular la expresión algebraica de la variación trimestral del modelo $f(x) - f(x - 1)$ y compararla con la derivada $f'(x)$. Los alumnos pudieron así constatar, con los modelos utilizados, las relaciones introducidas por el profesor en clase de teoría entre la función derivada, la tasa de variación media y la expresión de la recta tangente. La derivada aparecía así como un método sencillo de aproximar la variación trimestral del modelo considerado.

Se consiguieron así dos criterios complementarios para la elección del modelo funcional que mejor se describe la tendencia de las ventas de un producto. Los alumnos pudieron utilizarlos para aportar la previsión de ventas que se les planteaban en la cuestión inicial.

3. Evaluación de la experimentación: restricciones institucionales

3.1. Nuevo contrato didáctico

La organización de la asignatura de matemáticas y, en particular, la distribución de las sesiones, en *clases teóricas* y *talleres*, pretendía asignar al trabajo realizado en el *taller* un papel preponderante. La evaluación de la asignatura, que otorga un 50% de la nota total al trabajo realizado en el *taller* (informes intermedios y final) e incluye un "problema tipo taller" en el examen final, es coherente con esta organización. Y los alumnos habían sido informados de ello. A pesar de todo, ni la asistencia al *taller* fue regular, ni la elaboración de los informes (tanto de grupo como el final individual) tan "trabajada" como cabría esperar. Sin duda, la ruptura que se establecía con los contratos didácticos habituales era demasiado grande para que los alumnos pudieran asumir fácilmente el cambio.

3.2. Momento del primer encuentro y organización del trabajo en las sesiones

La sesión inicial, en la que se presenta la cuestión a desarrollar durante todo el *taller*, fue una sesión demasiado guiada por parte del profesor. Ninguno de los cuatro profesores supo dejar vivir el problema para que los alumnos lo examinaran libremente, con tiempo y sin indicaciones del camino a seguir. Visto retrospectivamente, creemos que se podía haber organizado el trabajo, por ejemplo, proponiendo la cuestión inicial en la primera sesión dejando todo el tiempo libre a los alumnos para que llegaran con una propuesta de trabajo para la siguiente sesión. De hecho, esta dinámica también se podría extender al resto de las sesiones, es decir, en lugar de tener a los alumnos trabajando bajo la batuta del profesor, se hubieran podido plantear los problemas en clase, con todos los comentarios y apreciaciones requeridos, dedicar más tiempo a las puestas en común y dejar que los alumnos trabajaran posteriormente de forma autónoma.

3.3. Puestas en común

De acuerdo con lo anterior, pensamos que se dedicó demasiado tiempo a hacer trabajar los alumnos en grupos y demasiado poco a las puestas en común, valoraciones, cuestiones nuevas, posibles direcciones a tomar, etc. Parecía en cierto sentido como si estuviera primando el contrato didáctico de Secundaria en el que los alumnos trabajan (individualmente o en grupo) y el profesor se pasea por el aula dando indicaciones apropiadas y guiando la dirección global del recorrido. Fueron, en efecto, los mismos profesores los que daban poca importancia al trabajo de la puesta en común y no supieron darle la "oficialidad" necesaria ante unos alumnos también reacios a este tipo de trabajo.

3.4. La redacción del informe

Al principio de cada sesión (excepto en la primera) cada grupo de alumnos tenía que entregar un informe sobre el trabajo de la clase anterior. La redacción de dichos informes supuso una dificultad muy grande para los alumnos que no estaban habituados a este tipo de labor. De hecho, la evolución de éstos a lo largo del curso ha sido muy positiva, notándose una gran diferencia entre los informes del primer taller y los de este segundo. Creemos que ayudó bastante el hecho de leer en voz alta al principio de cada clase algunos de los informes a modo de puesta en común, para que entre todos se hicieran las críticas pertinentes y se pudieran proponer las posibles mejoras. Los informes se devolvían corregidos y con comentarios por parte de los profesores. Se debe destacar que este tipo de trabajo nunca se realiza en Secundaria y que, creemos, fue bastante bien incorporado al trabajo didáctico realizado por los alumnos y los profesores. Se asumió desde el principio que los alumnos debían aprender a escribir los informes y sintetizar la información, que la tarea no iba a ser fácil y que los profesores debían inventar posibles dispositivos para ayudarles: lectura de los informes, acceso a ellos en la web, correcciones comentadas, posibilidad de reescritura, etc.

3.5. Topos del alumno y topos del profesor

Hemos iniciado este artículo comentando el reparto de tareas entre profesor y estudiantes que asigna el contrato didáctico imperante en la institución universitaria así como la necesidad de hacerlo evolucionar hacia una situación de responsabilidad compartida en la que los estudiantes puedan ir adquiriendo cada vez mayor protagonismo en la gestión e incluso dirección del proceso de estudio. En lo que se refiere al proceso experimentado, la implantación del nuevo contrato no ha sido demasiado efectiva desde distintos puntos de vista. Por un lado, la generación de nuevas cuestiones a partir del trabajo realizado y presentado por los alumnos siempre ha estado a cargo del profesor. Por ejemplo, en los informes de cada sesión, los profesores pedían a los alumnos que presentaran los resultados (finales o intermedios) obtenidos, pero no explicitaron que entre ellos debían aparecer también nuevas cuestiones para seguir con el estudio. Y lo mismo ocurría en las puestas en común. Por otro lado, la programación del taller, es decir la temporalización de las actividades y el tiempo dedicado al estudio de cada una de las "subcuestiones" también ha estado siempre dirigida por el profesor, sin dar mucho papel a los grupos de alumnos. Era el profesor quien decidía cuándo una cuestión ya parecía bastante resuelta como para poder plantear nuevos caminos a seguir. Por lo tanto, debemos resaltar las dificultades que tuvieron los cuatro profesores para ir modificando el contrato didáctico y dejar que los alumnos fueran asumiendo progresivamente más responsabilidades en la dinámica del proceso de estudio. Tal vez el hecho de trabajar los cuatro grupos clase en paralelo o el dilema que suponía emprender un camino interesante, matemáticamente hablando, pero alejado de la "planificación oficial" hizo que la supervisión del profesor pasase a ser una guía casi total.

4. Evaluación de la experimentación: la dialéctica de los media y los medios

En el análisis de la dinámica del proceso didáctico en términos de la dialéctica de los media y los medios podemos distinguir los dos puntos siguientes: el *problema de la elección del mejor modelo* y el criterio de la comparación entre el *ajuste de las variaciones* y las *variaciones del ajuste*. Veremos cómo el trabajo realizado en la primera parte – la búsqueda de la función que mejor se ajusta a los datos considerados, dentro de una familia de funciones determinada de antemano – funcionará como un ingrediente esencial del medio experimental que requiere el trabajo siguiente, el de la comparación entre distintos modelos previamente establecidos.

4.1. Primera parte del taller: el problema de la elección del mejor modelo

Durante la primera parte del taller, cuando el objetivo es encontrar una función que modelice y, pues, permita reproducir fielmente la dinámica de las ventas, la primera decisión a tomar es la de fijar la *familia de funciones* que parece reproducir la dinámica observada en los datos. El primer gesto del trabajo de los estudiantes fue representar los datos en un gráfico cartesiano de la hoja de cálculo Excel. La forma que éstos dibujan permite entonces determinar a priori qué tipo de función se elegirá: una recta, una parábola, una cúbica, una función exponencial o logarítmica (únicas familias consideradas). Cabe destacar en este punto que el hecho que los alumnos trabajaran con un conjunto de familias de funciones reducido y establecido a priori (rectas, parábolas, cúbicas, exponenciales y logarítmicas) no debe ser considerado como una limitación escolar ligada a la falta de conocimientos de los alumnos sino que reproduce la situación habitual del trabajo de modelización o previsión mediante ajuste. En este tipo de práctica, siempre se trabaja con un conjunto finito de modelos más o menos determinados a priori y ligados a restricciones que dependen de cada situación.

Volviendo a la dialéctica de los medios y los media, podemos decir aquí que el gráfico de Excel funciona a la vez como un *media* en la medida en que "indica" a los alumnos el tipo de función más apropiado y también como un *medio* puesto que, al representar la función elegida en el mismo gráfico, permite contrastar el grado de ajuste del modelo con los datos que modeliza. Ahora bien, para que la representación gráfica de los datos iniciales puedan funcionar como *media*, es necesario que se puedan activar los conocimientos previos de los alumnos sobre funciones elementales y, en particular, el trabajo con familias de funciones y sus respectivas gráficas realizado previamente durante las clases de teoría (§ 2.2) [2]. La novedad del trabajo que se debe realizar aquí es elegir la familia de funciones que parece más apropiada a la dinámica observada. Una vez elegida, se buscan distintos valores para los parámetros de la función y se contrastan las posibles soluciones utilizando una hoja de cálculo y la representación gráfica tanto de

2. Este trabajo culminaba con el problema de determinar, a partir de un conjunto de gráficas de funciones de una familia dada, la expresión algebraica que corresponde a cada función y a comprobar la solución propuesta representando gráficamente las expresiones con la ayuda de una calculadora simbólica.

los datos como de los valores de la función elegida. Son entonces estas representaciones gráficas las que funcionan como *medio* para la elección del mejor modelo.

El problema de cómo construir un *criterio para determinar el mejor ajuste* es la cuestión crucial que impulsa el proceso de estudio. Salvo en uno o dos casos, la simple comparación visual entre distintos posibles modelos para las ventas de los productos resulta muy pronto limitada. El medio constituido por las gráficas de Excel deja de funcionar como un media, deja de "hablar". Surge entonces la necesidad de establecer una *medida del ajuste* que viene a enriquecer el medio inicial dado por las series de datos numéricos o su representación gráfica. La opción elegida aquí –de nuevo un *mensaje* proporcionado por el profesor actuando como *media*– es la de calcular la suma o el promedio de las diferencias (en valor absoluto) entre los datos y los valores de la función considerada. La incorporación de la función "*solver*" de Excel –que funciona para los alumnos como una caja negra– proporciona entonces otro medio suplementario que agiliza el trabajo de búsqueda de la función que minimiza el error. Queda sin embargo pendiente el problema de la comparación entre dos funciones de distinta familia cuando los errores de cada caso no son demasiado distintos.

4.2. Segunda parte: entre el ajuste de las variaciones y las variaciones del ajuste

Una vez realizados algunos primeros ajustes con distintas *familias de funciones*, puede suceder que, en algunos casos, dos modelos distintos den lugar a errores medios similares. La existencia de un componente aleatorio en el valor del error medio hace que se plantee la necesidad de construir un *criterio suplementario para determinar cuál es el mejor modelo.* En este caso, el *medio* constituido por los valores numéricos y los gráficos tanto de las ventas como de los modelos se verá enriquecido por la introducción y el ajuste de una nueva variable: las variaciones de las ventas. La noción de derivada como aproximación de la variación será entonces el nuevo elemento del *medio* que aportará el profesor como nuevo criterio de validación del ajuste: si un modelo ajusta las ventas, entonces la derivada del modelo debería ser un buen ajuste para las variaciones de las ventas. Por ejemplo, si las ventas parecen seguir un crecimiento parabólico, se espera que las variaciones de las ventas sigan un crecimiento lineal; si el crecimiento es exponencial, que el de las variaciones también sea exponencial, etc. En este caso, el *medio* lo constituye el producto de todo el trabajo realizado en la primera parte del taller, es decir la construcción de distintos modelos para cada serie de datos.

El profesor, actuando como *media*, es el que introduce en este punto la indicación de la relación entre el ajuste de la variación media con la derivada del modelo previamente establecido. Además, y como ya hemos comentado previamente, al disponer de una calculadora simbólica que permite calcular con facilidad la expresión algebraica del valor medio $f(x + 1) - f(x)$ de una función cualquiera, se pudo incluso comparar el valor de la derivada del modelo con el de este valor medio y constatar así la aproximación mencionada.

Es importante señalar que el aumento de complejidad del *medio* dificultó sin duda el desarrollo de esta segunda parte del taller por tratarse todavía de un trabajo matemático inestable para los alumnos. Pero también creemos que la situación mostraba un caso ejemplar de la funcionalidad de la derivada como aproximación simple de la variación media de una función. [3]

Referencias

Barquero, B., Bosch, M. & Gascón, J. (2007). Using research and study courses for teaching mathematical modelling at university level. En D. Pitta-Panzati & G. Philippou (Eds.), *Proceedings of the V^{th} Congress of the European Society for Research in Mathematics Education* (pp. 2150-2159). Nicosia, Chipre: Cyprus University Press.

Barquero, B., Bosch, M. & Gascón, J. (2010). Ecología de la modelización matemática: Restricciones transpositivas en las instituciones universitarias. En A. Bronner, M. Larguier, M. Artaud, M. Bosch, Y. Chevallard, G. Cirade & C. Ladage (Eds.), *Diffuser les mathématiques (et les autres savoirs) comme outils de connaissance et d'action* (pp. 527-549). Montpellier: IUFM.

Chevallard, Y. (2004, mayo). Vers une didactique de la codisciplinarité. Notes sur une nouvelle épistémologie scolaire. *Journées de didactique comparée 2004*, Lyon. http://yves.chevallard.free.fr/spip/spip/article.php3?id_article=45

3. Trabajo realizado en el marco del proyecto de investigación EDU2008-02750/EDUC del Ministerio de Ciencia e Innovación de España.