Departamento de Matemáticas
Facultad de Ciencias
Universidad de Zaragoza

EL PROCESO DE ALGEBRIZACIÓN DE ORGANIZACIONES MATEMÁTICAS ESCOLARES

Pilar Bolea Catalán

Memoria realizada para la obtención
del título de doctor bajo la dirección de
Marianna Bosch Casabó y
Josep Gascón Pérez

Zaragoza, junio de 2002

Este trabajo ha sido realizado en el marco del proyecto BSO2000-0049 de la DGIYT (MCT)

Creo que el momento de los agradecimientos es, a nivel humano y personal, uno de los más importantes vividos en la finalización de esta tesis. Importante porque es cuando haces balance de la experiencia que ha supuesto la realización del trabajo y te das cuenta que tienes que dar a “muchos” las gracias.
Gracias al Departamento de Matemáticas de mi Universidad por haberme facilitado la formación necesaria para emprender esta tarea, a través de Seminarios y cursos de tercer ciclo, muchos de ellos impartidos por profesores de otras universidades, ya que nuestra área no disponía de doctores que pudieran afrontarlos.
Gracias a mis compañeros de departamento que me han animado a estudiar y trabajar, por su optimismo y la confianza depositada en mi esfuerzo. También mi agradecimiento a los más críticos, porque me han obligado a cuestionar y mejorar el trabajo y con ello mi formación se ha visto enriquecida.
Gracias a mis directores de tesis Mariana Bosch y Josep Gascón, sin sus sabias orientaciones, sus originales ideas y mejores consejos, acompañados de una calidad humana extraordinaria, no habría sido posible la realización de esta investigación.
Gracias a cuantos me habéis empujado, animado y ayudado en este proceso largo pero fructífero, especialmente a los profesores que nos facilitasteis los datos de la encuesta.
Gracias a Vicente, Lorenzo, Álvaro y Vicente, y a Álvaro y Gregoria por vuestro cariño y comprensión y por vuestra paciencia.

INDICE

CAPÍTULO III

¿QUÉ ES EL ÁLGEBRA ESCOLAR?

CAPÍTULO IV

UN ESTUDIO EXPLORATORIO:
SITUACIÓN ACTUAL DEL ÁLGEBRA EN LA ESO

CAPÍTULO V

FUNCIONES DIDÁCTICAS DEL PROCESO DE ALGEBRIZACIÓN

CAPÍTULO VI

LA TRANSPOSICIÓN DIDÁCTICA DE OM EN PROCESO DE ALGEBRIZACIÓN
CONCLUSIONES Y PROPUESTA DE NUEVOS PROBLEMAS

INTRODUCCIÓN

El trabajo que se presenta a continuación aborda un problema antiguo, muy trabajado, pero no por ello resuelto, que ha estado cuestionado desde los inicios de la didáctica de las matemáticas como disciplina científica: el **problema didáctico del *álgebra escolar***.

El primer capítulo explica brevemente cómo el programa cognitivo de investigación en didáctica de las matemáticas reformula dicho problema en términos de las dificultades del sujeto que aprende y de las estrategias del sujeto que enseña. Veremos que el problema didáctico del *álgebra escolar* evoluciona conjuntamente con las diferentes respuestas que proporcionan las sucesivas perspectivas del programa cognitivo y expondremos las aportaciones y limitaciones de cada una de ellas.

El capítulo 2 empieza a mostrar cómo abordar este problema desde la perspectiva del programa epistemológico, partiendo de la Teoría de las Situaciones Didácticas e integrando los primeros desarrollos del enfoque antropológico. La evolución de este enfoque, que da origen a la Teoría Antropológica de lo Didáctico, pone de manifiesto la necesidad de explicitar, desde la didáctica, un modelo epistemológico específico del álgebra escolar.

La construcción de este modelo, basado en la interpretación del *álgebra escolar* como *actividad de modelización*, así como el análisis de los vínculos y diferencias que se pueden establecer respecto a otras posibles interpretaciones del *álgebra escolar* (en particular con la *aritmética generalizada)*, es el objeto del capítulo 3.

En el capítulo 4 llevamos a cabo un estudio empírico para, por un lado, poner a prueba la hipótesis de que el modelo dominante en la institución escolar es el de la *aritmética generalizada* y, por otro, contrastar la validez de nuestro modelo epistemológico del *álgebra escolar* como instrumento de análisis de las prácticas didácticas institucionalizadas.

Una de las conclusiones principales de los dos capítulos anteriores es que el *álgebra escolar* en estos niveles básicos no puede ser considerada como una organización matemática con identidad propia sino que debe pensarse inicialmente como un instrumento de modelización de organizaciones matemáticas previamente construidas. El problema didáctico del *álgebra escolar* puede entonces formularse en términos del *problema del proceso de algebrización de organizaciones matemáticas escolares*. Y el fenómeno de la "desalgebrización" del currículum de secundaria aparece entonces como un fenómeno de *algebrización parcial* de las organizaciones matemáticas escolares.

En el capítulo 5 analizamos determinados procesos concretos de algebrización de ciertas organizaciones matemáticas escolares, analizando el grado de algebrización que poseen en el currículum actual, así como las transformaciones que sufrirían al aumentar su grado de algebrización. La elección de los tres casos estudiados —los programas de cálculo, la divisibilidad en N y la proporcionalidad— se justifica por tres motivos distintos. El primer caso (programas de cálculo) responde al problema de determinar una organización matemática mínima que contenga la aritmética elemental y cuya algebrización permita la construcción de las principales herramientas del cálculo algebraico. El segundo caso (divisibilidad) permite ejemplificar la función didáctica del proceso de algebrización como integrador de organizaciones matemáticas puntuales en una organización local. Por último, la proporcionalidad ejemplifica la coexistencia, en un mismo currículum y una misma época histórica, de componentes con diferentes grados de algebrización de una misma organización matemática —las relaciones entre magnitudes—. Este fenómeno abre la vía para analizar el papel que juega el proceso de algebrización en el estudio de los procesos de transposición didáctica.

El capítulo 6 propone una pequeña incursión en el análisis de los procesos transpositivos a partir de la constatación de que toda transposición didáctica opera sobre Organizaciones Matemáticas complejas en proceso de matematización creciente y, en particular, de algebrización.

Por último la memoria concluye con una importante ampliación del campo de problemas de investigación didáctica. Es en este campo, que rebasa ampliamente la problemática del *álgebra escolar*, en el que se sitúa nuestra reformulación del problema didáctico inicial. En concreto, hemos planteado nueve cuestiones bastante precisas que podemos interpretar, a posteriori, como aquellos aspectos del "nuevo" problema didáctico del *álgebra escolar* que hemos intentado abordar a lo largo de este estudio.

CAPITULO I

EVOLUCIÓN DEL PROBLEMA DIDÁCTICO DEL ÁLGEBRA ESCOLAR

1. UN PUNTO DE PARTIDA: LOS "PROGRAMAS DE INVESTIGACIÓN" DE LAKATOS

Toda síntesis de los trabajos existentes sobre un determinado problema de enseñanza y aprendizaje –en nuestro caso, la enseñanza y el aprendizaje del álgebra escolar– supone *un punto de vista previo sobre la naturaleza de la problemática didáctica* y sus posibles desarrollos. Este punto de vista suele mantenerse implícito en la mayor parte de las investigaciones en didáctica de las matemáticas, lo que comporta, en última instancia, el presentar una lista de trabajos no necesariamente articulados entre sí, o bien articulados mediante criterios muy dispares (metodología, contenido matemático abordado, cronología, autores, país, etc.) como si todos ellos abordaran un mismo tipo de problemas.

Dado que actualmente las investigaciones en didáctica de las matemáticas parten de supuestos básicos muy distintos, utilizan términos primitivos dispares y provenientes de diferentes disciplinas y hasta abordan problemas de naturaleza muy diferente, nos parece imprescindible comenzar por "reordenar" de alguna manera el conglomerado de “perspectivas teóricas” que aparecen de una forma bastante implícita en las investigaciones didácticas sobre el álgebra escolar.

La reconstrucción que propone Gascón (1998), utilizando los modelos de Lakatos (1971) y Kuhn (1975), toma como criterio básico la evolución y la ampliación sucesiva del objeto de estudio de la didáctica, evolución que provoca un cambio sustancial en la naturaleza de los problemas didácticos. Resulta entonces que cada trabajo de investigación se puede enunciar y es comprensible sólo dentro de un determinado enfoque, dentro de un determinado Programa de Investigación.

Recordemos que para Lakatos (1971) el conocimiento científico se organiza a través de Programas de Investigación cuya estructura se caracteriza y está compuesta por los siguientes elementos:

- *Un Núcleo Firme:* que está constituido por los postulados aceptados y considerados infalsables, provisionalmente, por decisión metodológica de los investigadores del programa.
- *Un Cinturón Protector:* del que forman parte las hipótesis auxiliares y los supuestos adyacentes que protegen el núcleo firme y que sí que se pueden modificar.
- *Una Heurística positiva:* que indica cómo desarrollar el programa de investigación, es decir, las líneas prioritarias de investigación, el tipo de cuestionamiento, etc. Contiene propiamente los problemas de investigación y la metodología pertinente.
- *Una Heurística negativa:* que es la que desaconseja el estudio de ciertos problemas, o restringe el tipo de cuestionamiento, la metodología, etc.

Dentro de un mismo Programa de Investigación pueden existir teorías que, aún teniendo el mismo *núcleo firme*, es decir, los mismos principios básicos, tengan distinta *heurística positiva*, esto es, distintas formas e instrumentos para desarrollar el Programa de Investigación. Diremos, en ese caso, que se trata de teorías *rivales*. Entre ellas se pueden comparar los resultados, la fecundidad en la producción de problemas relevantes, la potencia de los instrumentos teóricos, etc. Por otra parte, se dice que dos teorías son *inconmensurables* si tienen distinto *núcleo firme* y, por tanto, los resultados obtenidos en cada una de ellas son *"intraducibles"*, no pueden compararse, ya que no existe un lenguaje común “en el marco del cual ambas (teorías) pudieran ser expresadas por completo y, por consiguiente, ambas pudieran ser usadas comparándolas entre sí punto por punto" (Kuhn 1975, p. 191). Cuando dos teorías son *inconmensurables* se sitúan en Programas de Investigación distintos, puesto que la naturaleza del núcleo firme es el elemento clave para identificar un Programa de Investigación.

2. EVOLUCIÓN DE LA DIDÁCTICA DE LAS MATEMÁTICAS COMO DISCIPLINA CIENTÍFICA

A partir de la época de los ochenta, uno de los marcos dominantes en la mayor parte de las investigaciones en didáctica de las matemáticas es el que denominaremos "Programa Cognitivo". Su *núcleo firme* está constituido en primer lugar por un modelo del funcionamiento cognitivo del sujeto, tanto del alumno como del profesor. En su inicio, el punto de vista cognitivo considera el aprendizaje de las matemáticas como un proceso psicocognitivo, fuertemente condicionado por factores motivacionales, afectivos y sociales. Su principal referente histórico y científico es la psicología genética de Jean Piaget, al que siguieron, entre otras, la Teoría Cognitiva del Aprendizaje Humano de Conceptos de Ausubel, cuya noción central era la de "aprendizaje significativo" y la de Vygotski cuya noción central es la "zona de desarrollo próximo" en la que subraya la importancia de los "otros" en la construcción del conocimiento.

Otro componente del *núcleo firme*, básico e incuestionable en los comienzos del Programa Cognitivo, es que el modelo epistemológico del saber se identifica inicialmentecon una red de conceptos que el individuo ha de construir. Debemos subrayar que la "Estructura Conceptual de la Ciencia", que constituye la segunda componente básica para llevar a cabo el "Análisis del Currículum Escolar" en el ámbito del Programa Cognitivo, funcionaba como un elemento transparente y no cuestionable. A lo sumo, se cuestionaba la forma de organizar mejor la ciencia, con el fin de facilitar el aprendizaje significativo de los alumnos.

Esquemáticamente, y simplificando mucho las cosas, podríamos decir que, en sus primeras formulaciones, las teorías del Programa Cognitivo asumen como principios de su *núcleo firme:*

- Un modelo psicológico de los procesos cognitivos del sujeto.
- Un modelo epistemológico de las matemáticas escolares como una red de conceptos que el alumno ha de construir.

La problemática didáctica inicial en el Programa Cognitivo giró alrededor de la noción de “aprendizaje significativo” (Ausubel 1968) y su objeto primario de investigación era el *conocimiento matemático del alumno y su evolución.* Estos estudios relativos a cómo aprende matemáticas el sujeto tendrían una repercusión inmediata en el modelo de enseñanza escolar, ya que permitirían, posteriormente, organizar y elaborar un modelo docente, un modelo adecuado de curriculum y diseñar y proponer un programa de instrucción escolar adaptado a la presunta evolución de los procesos cognitivos del alumno.

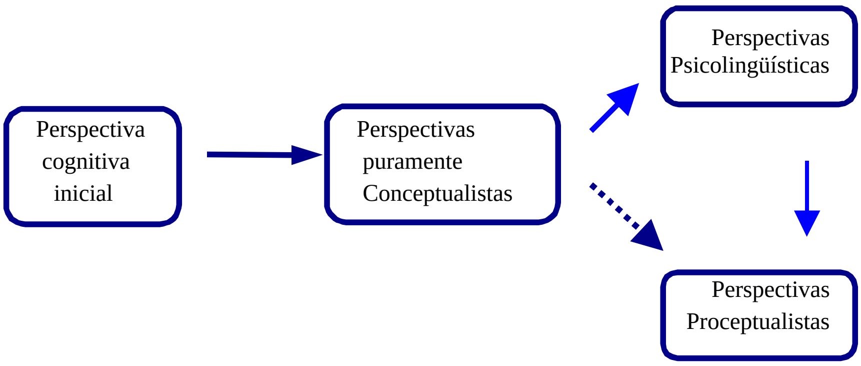
A medida que evolucionaba el Programa Cognitivo se ponía de manifiesto la insuficiencia del modelo cognitivo del sujeto y del modelo epistemólogico de la ciencia, es decir, la insuficiencia tanto, de la noción general de “*aprendizaje humano*”, como de los instrumentos teóricos disponibles para describir el *conocimiento matemático del alumno*.

Documenta esta evolución del Programa Cognitivo el nacimiento del movimiento *International Group of the Psychology of Mathematics Education (PME)* (Bauersfeld y Skowronek 1976), que reivindicó la necesidad de tener en consideración una especie de “*aprendizaje específicamente matemático*”. De esta forma se modificarían convenientemente los elementos del *núcleo firme* y la correspondiente *heurística positiva*, pero sin cambiar el objeto primero de investigación que continuaba siendo la *actividad cognitiva del sujeto* que aprende matemáticas.

Los investigadores de este grupo tomaron, como objeto primario de investigación, un aspecto particular de la actividad cognitiva del sujeto —los *procesos de aprendizaje matemático del alumno*— y empezaron a construir instrumentos teóricos necesarios para describir dichos procesos de aprendizaje.

Posteriormente, en 1985, un grupo de trabajo del PME centró su interés en el *pensamiento matemático avanzado*, profundizando en la problemática del Programa Cognitivo y centrándola en la elaboración de un *modelo de los procesos cognitivos que intervienen en la construcción de nociones y conceptos matemáticos*.

Las sucesivas ampliaciones de las teorías del Programa Cognitivo se resumen en el siguiente cuadro:



A lo largo de esta evolución, que todavía hoy continúa y cuya complejidad no pretendemos describir ni siquiera esquemáticamente en este trabajo, *el Programa Cognitivo* en didáctica de las matemáticas no ha dejado nunca de postular, de una manera más o menos explícita, que su *objeto primario de investigación* lo constituye la *actividad cognitiva del sujeto*. Por otra parte, todas estas perspectivas tienen en común un rasgo esencial:

> Asumen o, cuanto menos, no cuestionan abiertamente el modelo epistemológico de las matemáticas dominante en las instituciones escolares.

Además, estos modelos epistemológicos permanecen, en la mayor parte de las instituciones, ocultos o al menos no formulados de forma explícita. Esta limitación es muy importante porque impide tomar como objeto primario de estudio las cuestiones que hacen referencia a la propia organización matemática escolar.

El nacimiento del nuevo Programa de Investigación en Didáctica de las Matemáticas coincide con los trabajos de Guy Brousseau y la publicación de la Teoría de Situaciones (Brousseau, 1986, 1989, 1998[1]). Su rasgo esencial está en tomar como objeto primario de investigación el saber

[1] La obra *Théorie des situations didactiques* es una recopilación de los trabajos realizados y publicados por el autor durante el periodo 1970-1990.

matemático y, por tanto, en cuestionar, modelizar y problematizar, según las reglas de la actividad científica, no sólo al sujeto que aprende o al sujeto que enseña, sino la propia actividad matemática que, en común, profesor y alumno van a realizar. Para explicar los hechos que se producen en la enseñanza de las matemáticas, este nuevo Programa postula que el "misterio" está en las propias matemáticas antes que en los sujetos que tienen que aprender y enseñar matemáticas.

Este nuevo principio que considera prioritaria la cuestión de la modelización de la actividad matemática no sólo representa una ampliación del Programa Cognitivo, sino que constituye un nuevo programa de investigación en el sentido descrito anteriormente (Lakatos 1971), ya que supone una ruptura al producirse un cambio sustancial del *núcleo firme*. A este nuevo Programa de Investigación lo llamamos *Programa Epistemológico* en didáctica de las matemáticas.

El núcleo firme de este nuevo Programa de Investigación está constituido por un modelo epistemológico general de la actividad matemática y, correlativamente, por los modelos epistemológicos específicos de los diferentes "ámbitos" de la actividad matemática y, en particular de la actividad matemática escolar.

La emergencia de fenómenos didácticos-matemáticos no reducibles a fenómenos psicológicos, sociológicos o lingüísticos es característica de la *heurística positiva* del Programa Epistemológico y comporta la consiguiente emergencia de los problemas didáctico-matemáticos ya que, en toda disciplina científica, cada tipo de problemas hace referencia a un (aspecto de un) fenómeno. La voluntad de elaborar una ciencia relativamente autónoma de los fenómenos didácticos constituye una segunda ruptura de este enfoque, y conduce a explicar los modelos de la actividad matemática utilizados para someterlos a la prueba de los hechos observables, es decir, a las leyes de una verdadera "epistemología experimental".

La construcción de los problemas de investigación en el marco del Programa Epistemológico requiere, teóricamente, la concreción previa de los modelos epistemológicos de la actividad matemática en sus diferentes ámbitos. Es decir, las investigaciones en didáctica de las matemáticas van a estar condicionadas por el tipo de modelización de las actividades matemáticas al que se ha recurrido. Las distintas modelizaciones de la actividad matemática han dado lugar a diferentes perspectivas teóricas dentro de este enfoque, perspectivas que también surgen de las diversas ampliaciones de la propia noción de didáctica de las matemáticas. Debemos destacar la Teoría de Situaciones Didácticas (TSD), y la Teoría Antropológica de lo Didáctico (TAD) que, en sus primeros desarrollos, se la denominó "enfoque antropológico".

Así pues, el cambio fundamental que se produce, respecto al Programa Cognitivo, radica en cuestionar el "modelo epistemológico de la actividad matemática". De esta forma, el objeto de estudio de la didáctica no se encuentra encerrado en las instituciones de enseñanza, hace falta situarlo en el marco más amplio de las "prácticas matemáticas" que se desarrollan en el conjunto de las instituciones de la sociedad.

La Teoría Antropológica de lo Didáctico se sitúa en este Programa Epistemológico, en el que la problemática primera es la modelización de los conocimientos matemáticos. Su núcleo firme tiene dos componentes esenciales:

(a) Por una parte, un modelo epistemológico general de la *actividad matemática* considerada como *estudio de campos de problemas*. Se introduce en esta teoría la noción de *organización* o *praxeología matemática*[2] compuesta por cuatro categorías de elementos:

1. Cierto número de *tipos de problemas,* o tareas problemáticas
2. Un conjunto estructurado de *técnicas* que permiten abordar dichos problemas
3. Un *discurso tecnológico* que describe, explica y justifica las técnicas.
4. Un segundo y último nivel justificador, la *teoría*, que da sentido a los problemas planteados, permite interpretar las técnicas y fundamenta las descripciones y demostraciones tecnológicas.

(b) Por otra parte, un modelo del *proceso de estudio, creación o recreación* de una organización matemática. Dicho *proceso de estudio* se organiza a través de seis *momentos* o *dimensiones* que forman parte de la denominada *teoría de los momentos didáctico* [3]

[2]Más adelante describiremos detalladamente y ejemplificaremos los diferentes componentes de la noción de "praxeología" que es central en la TAD.
[3]Más adelante detallaremos esta teoría.

1. El momento del primer encuentro
2. El momento exploratorio
3. El momento del trabajo de la técnica
4. El momento tecnológico-teórico
5. El momento de la institucionalización
6. El momento de la evaluación

Existiendo una profunda relación entre la estructura *del proceso didáctico o proceso de estudio*, y la estructura de la *organización matemática* resultante.

La heurística positiva asociada a esta perspectiva marca como línea prioritaria de investigación didáctica el tipo de problemas que podríamos describir en sentido amplio de la siguiente forma:

> Analizar las *organizaciones matemáticas* que son propuestas para ser estudiadas en la escuela, las que son efectivamente construidas en el aula y las *organizaciones didácticas del profesor y de los alumnos* que permiten llevar a cabo los *procesos de estudio* correspondientes.

3. LA PROBLEMÁTICA DOCENTE ESPECÍFICA DEL *ÁLGEBRA ESCOLAR*

Partiremos aquí de la *problemática docente* (o problemática *del profesor)* que se sitúa en un estadio previo a la constitución de las didácticas como disciplinas científicas. Forman parte de la problemática docente tanto el conjunto de problemas y cuestiones generales relativos a la enseñanza y al aprendizaje que se plantean en el sistema de enseñanza y en la cultura escolar dominante, como los problemas docentes específicos relativos, en nuestro caso, a la enseñanza y aprendizaje del *álgebra escolar* (Gascón 1999_b).

Algunos de los problemas docentes (que simbolizamos con las iniciales PD) que son específicos de la enseñanza del *álgebra escolar* pueden enunciarse de la siguiente forma:

PD1. *¿Qué contenidos de álgebra tengo que enseñar y explicar y cómo hacerlo para que mis alumnos lo aprendan?*

PD2. *¿Por qué los alumnos cometen tantos errores en las manipulaciones algebraicas? ¿Por qué se sienten más seguros con cualquier regla nemotécnica que con una regla algebraica por sencilla que sea?*

PD3. *¿Por qué es tan difícil para la mayor parte de los alumnos traducir al lenguaje algebraico las condiciones de un problema de planteo? ¿Es posible enseñar este proceso de traducción? ¿Cómo?*

PD4. *¿Por qué los alumnos no están motivados para aprender/estudiar álgebra?*

PD5. *¿Cómo coordinar la enseñanza formal del cálculo algebraico con la enseñanza de la resolución de problemas? ¿En el proceso de evaluación del aprendizaje del álgebra en cuál de dichos aspectos debe hacerse más énfasis?*

Algunas de las primeras respuestas posibles a estas cuestiones pueden extraerse de los documentos propuestos por la propia administración educativa, los textos escolares y las revistas de divulgación de experiencias dirigidas principalmente a los profesores. Estos documentos han constituido la fuente principal en la que hemos encontrado las ideas dominantes en la institución escolar.

En el marco de esta problemática genérica podríamos recordar al profesor D. Pedro Puig Adam (1959, p. 157) y su "Decálogo sobre la didáctica de la matemática media" que está claramente orientado a dar respuestas a la problemática docente del profesor. Algunas de sus "normas didácticas" pueden ser consideradas como repuestas parciales a los problemas docentes específicos del *álgebra escolar*.

Este conjunto de cuestiones que surgen en la práctica docente constiutyen el origen de las distintas investigaciones en didáctica de las matemáticas sobre el *álgebra escolar*. Aunque estas investigaciones las reformulen y problematicen hasta el punto de hacerlas difícilmente reconocibles, dichas cuestiones son las preocupaciones que guían gran parte de nuestra investigación y se encuentran en el horizonte de nuestro trabajo.

4. APORTACIONES DEL PROGRAMA COGNITIVO AL PROBLEMA DIDÁCTICO DEL *ÁLGEBRA ESCOLAR*

Como ya hemos señalado, el punto de vista cognitivo considera el aprendizaje de las matemáticas como un proceso psico-cognitivo, fuertemente influenciado por factores motivacionales, afectivos y sociales. Su problemática didáctica tiene como punto de partida el estudio empírico de los errores que cometen los alumnos en el desarrollo de su actividad matemática. Ahora bien, el Programa Cognitivo[4] ha ido evolucionando adaptándose a la propia evolución y ampliación de los elementos que configuran su núcleo firme y por lo tanto ensanchando su problemática didáctica. A lo largo de toda esta evolución destacamos las perspectivas rivales más interesantes en el ámbito del *álgebra escolar*, que son la inicial o *puramente conceptualista*, la *psicolingüística* y la *"proceptualista"*.

4.1. Perspectivas Conceptualistas

Hablaremos de *perspectivas conceptualistas* cuando se toman como objeto primario de investigación los procesos de construcción y adquisición de determinados conceptos matemáticos. En este caso se están asumiendo de una forma más o menos explícita los siguientes supuestos básicos:

(a) Un *modelo conceptualista de la matemática escolar*, esto es, una interpretación de la matemática escolar en términos de un sistema o red de conceptos.

(b) Un *modelo del aprendizaje* basado en la *adquisición o construcción de conceptos* que el alumno debe llevar a cabo a través de su experiencia en el aula.

Según Rojano (1994), éstas eran las perspectivas dominantes entre los investigadores durante la década de los setenta y gran parte de los ochenta. A lo largo de ese periodo, y en lo que a la problemática del *álgebra escolar* se refiere, se hicieron incluso adaptaciones del modelo piagetiano de las *etapas del desarrollo de los conceptos* para poder aplicarlo a las interpretaciones que hacen los alumnos de los símbolos literales (Küchemann, 1981).

---

[4] En Bolea, Bosch y Gascón, 2001, se analizan con detalle las aportaciones del Programa Cognitivo.

Una de las panorámicas más completas a este Programa Cognitivo queda recogida en el artículo de Kieran y Filloy (1989) en el que intentan resumir los problemas principales de la investigación didáctica en *álgebra escolar*, dentro de lo que ellos consideran una perspectiva *psicológica.* El cambio que se produce en la problemática didáctica respecto al *álgebra escolar* y las respuestas aportadas por los investigadores muestran el carácter científico de este Programa. Gran parte de las investigaciones que pueden incluirse en las perspectivas conceptualistas parten del *estudio empírico de los errores que cometen los alumnos* al pasar de la aritmética al álgebra**.** Estos errores y, más en general, el conjunto de dificultades con las que se enfrentan los alumnos en dicho tránsito, se han intentado explicar como una consecuencia de ciertos "*errores conceptuales*" de los alumnos, presuntamente originados en la enseñanza-aprendizaje de la aritmética (Booth, 1984, pp. 87-92).

Según Kieran y Filloy (1989) y Filloy (1999) muchas investigaciones sobre álgebra hechas en el marco del PME se centraron, durante la década de los ochenta, en el análisis de la influencia de las concepciones previas de los alumnos en el estudio posterior de ciertas nociones. Así, por ejemplo, algunas investigaciones intentan explicar cómo influye el modelo o *concepción implícita primitiva* que tienen los estudiantes del *concepto de "ecuación"*, sobre su forma particular de *resolver ecuaciones*.

Con el símbolo PC, indicaremos brevemente alguno de los problemas más relevantes tratados por las perspectivas conceptualistas primitivas y algunas de las respuestas que más incidencia han tenido en la comunidad científica. Señalamos tres tipos de problemas:

PC1: Las cuestiones derivadas de la *instrucción previa* en el marco aritmético:

> *¿Cómo influye el conocimiento de lo aritmético en el aprendizaje del álgebra escolar? ¿Cómo podrían utilizarse las semejanzas y las diferencias entre las estructuras conceptuales de los alumnos y las correspondientes estructuras de los sistemas conceptuales algebraicos, con el fin de potenciar el aprendizaje significativo?*

PC2: La influencia de las *concepciones previas* de los alumnos respecto a nociones nuevas:

> *¿Cuáles son las concepciones espontáneas o primitivas de los alumnos respecto a los conceptos fundamentales del álgebra, como por ejemplo, los conceptos de "variable", "ecuación", "parámetro", etc.? ¿De qué forma dichas concepciones dificultan el aprendizaje del álgebra escolar?*

PC3: Cómo debe actuar el profesor y, por lo tanto, cómo deben modificarse las *prácticas de enseñanza* a la luz de los resultados anteriores:

> *¿Cómo deben modificarse las prácticas de enseñanza para ayudar a los estudiantes a construir esquemas necesarios para la comprensión de los conceptos algebraicos? ¿De qué forma los aspectos visuales pueden potenciar el aprendizaje del álgebra?*

En términos generales, podemos decir que la mayoría de las explicaciones propuestas dentro de las perspectivas conceptualistas primitivas presuponen que el *marco de referencia aritmético* puede dar respuesta a gran parte de los errores que cometen los estudiantes y en general de las dificultades que se presentan en el aprendizaje inicial del álgebra. Es lógico, por tanto, que muchos de los problemas de investigación didáctica abordados desde estas perspectivas conceptualistas tomen en consideración la incidencia de dicho *marco aritmético* sobre las *concepciones primitivas* de los estudiantes. Otro avance importante de la investigación lo constituye la distinción entre *errores* cometidos por los alumnos y *obstáculos*. La mayor parte de los investigadores asumen la noción de obstáculo epistemológico descrita por Bachelard (1938) desde una perspectiva epistemológica. La ampliación posterior que desde la didáctica de las matemáticas se hace de esta noción,debida a los trabajos pioneros de Guy Brousseau, nos lleva a distintos tipos de obstáculos según dónde resida su procedencia: epistemológicos, didácticos, cognitivos, culturales, etc.

La mayor parte de las aportaciones de este Programa han tenido una influencia importante en el modelo docente. Los cambios, por una parte, apuntan hacia la planificación de actividades creativas que permitan la construcción de conceptos por parte de los alumnos, frente a un aprendizaje memorístico y falto de sentido. Por otra, hacia la secuenciación de los contenidos curriculares y en su temporalización, ya que el avance en el desarrollo del aprendizaje de los alumnos puede estructurarse por etapas, que a su vez se pueden relacionar con su edad.

Finalmente, debemos señalar que el modelo docente sustentado por estas investigaciones tiene un marcado carácter *pedagógico*, para su descripción se usa la terminología importada de la pedagogía: *temporalización*, *secuenciación*, etc.

4.2. Perspectivas psicolingüísticas y "proceptualistas"

Con el desarrollo de la investigación relativa a la enseñanza del *álgebra escolar* llegó un momento en el que las explicaciones puramente conceptualistas aparecieron claramente insuficientes e inoperantes. En la propia década de los ochenta empezó a surgir el interés por el estudio de los aspectos *semántico* y *sintáctico* de las matemáticas en general y del álgebra en particular, con el fin de poder explicar las observaciones empíricas acerca de las interpretaciones que dan los estudiantes a los símbolos matemáticos.

Las perspectivas psicolingüísticas, representadas entre otros por los investigadores Rojano (1994), Laborde (1990), Kaput (1987 y 1996), Filloy y Rojano (1984 y 1989), Drouhard (1992 y 1995) Radford y Grenier (1996), Sfard y Linchevski (1991 y 1994), Arzarello-Bazzini-Chiappini, (1993 y 1994), amplían considerablemente la perspectiva puramente conceptualista ya que añaden la dimensión de *lenguaje*, que posee el *álgebra escolar*, al modelo epistemológico de las matemáticas. Para estos autores el álgebra escolar forma parte del lenguaje matemático y como tal lenguaje debe enseñarse. Partiendo del "énfasis que la psicolingüistíca y la teoría del procesamiento de la información (inteligencia artificial) ponen en un modelo procesual de las habilidades humanas", pretenden que "dicho modelo explica cómo y por qué los usuarios del lenguaje algebraico cometen errores en sus procedimientos sintácticos" Kieran y Filloy (1989, p. 235).

Por tanto, esta nueva perspectiva modifica la teoría conceptualista primitiva en los siguientes términos:

- Amplia el antiguo conceptualismo puro para incluir el *lenguaje*. La matemática escolar pasa de ser considerada una red de conceptos que el alumno ha de construir, a ser considerada un lenguaje que puede ser enseñado.
- Toma como modelo de referencia la Lingüística General.

Además, la *heurística positiva* introduce en la problemática didáctica como líneas prioritarias de investigación, entre otras, las siguientes cuestiones:

- El paso del *Lenguaje Aritmético* al *Lenguaje Algebraico.*
- La influencia del *Lenguaje Natural* en dicho tránsito que se supone enmarcado en una actividad conceptual. Aparece la problemática de la relación entre la semántica y la sintaxis del lenguaje algebraico.
- La discrepancia entre el *"significado"* que adjudica el profesor y el que adjudican los alumnos a determinados objetos matemáticos.

Cuestiones que dan lugar a una ampliación de la problemática didáctica, que simbolizamos con PP, en los siguientes términos:

PP4. *¿Cómo construir una semántica de los símbolos y de las operaciones algebraicas ligada a las situaciones que están presentes en los enunciados de los problemas que hay que resolver algebraicamente?*

El problema del "significado" está presente en la mayor parte de los trabajos sobre *álgebra escolar*. En este sentido Kaput (1996, p. 91), respecto a uno de los aspectos del *álgebra escolar* señala que:

> […] muchos aceptan que el cálculo guiado sintácticamente sobre los formalismos es la esencia del álgebra. No obstante, ni los formalismos ni las acciones que sobre ellos se llevan a cabo pueden aprenderse de una forma viable sin tener en cuenta un punto de partida semántico –donde los formalismos se toman inicialmente para representar algún episodio de la experiencia del estudiante.

Otro problema didáctico a propósito de la relación entre los símbolos y las ideas algebraicas que representan podemos enunciarlo en los siguientes apartados:

PP5. *¿Qué papel juegan los símbolos en la apropiación por parte de los alumnos de las ideas algebraicas básicas en el contexto de la resolución de problemas verbales?*
¿Cuáles son las ideas representadas mediante los símbolos del álgebra escolar?

¿Cómo podemos crear en el aula situaciones que lleven a los alumnos a desarrollar las ideas que deberán ser representadas mediante los símbolos del álgebra escolar?
¿Cómo debemos orientar, en el aula, las actividades destinadas a estimular las interrelaciones entre los símbolos y las ideas?

Este problema ha sido planteado por Radford y Grenier (1996, p. 254) y una de sus posibles respuestas proviene del estudio de las relaciones que pueden establecerse entre las ideas y los símbolos, entre los objetos y sus representaciones; para estos autores dicha relación "no puede ser considerada como una interacción que consista solamente en poner en contacto un objeto (o una idea) inmutable y externo al individuo con la representación de ese objeto, como se produce en la epistemología platónica. Lejos de eso, la interacción entre los símbolos y las ideas debería ser vista como un sistema de relaciones construidas por el propio individuo en su desarrollo intelectual, social e individual". Parten de la hipótesis de que cada relación idea-símbolo se basa en una conceptualización de los objetos matemáticos, esto es, en una forma individual de interpretar dichos objetos.

El hecho de que una expresión algebraica pueda interpretarse de diferentes formas constituye, a la vez, una de las principales potencias del álgebra y una de las principales fuentes de dificultades en su aprendizaje:

PP6. *¿Cómo hacer de los estudiantes "activos buscadores de sentido"? ¿Cómo conseguir que los estudiantes interpreten las situaciones, interpreten sus propias acciones y asignen el significado adecuado, en cada caso, a los símbolos y a las operaciones?*

Entre los autores que estudian estas cuestiones, Sfard y Linchevski (1994), afirman que el origen de muchas de las dificultades de los alumnos respecto a la interpretación algebraica de diferentes situaciones, radica en que mientras éstos tienden a adjudicar un *significado rígido a cada expresión algebraica*, el profesor puede interpretarla desde puntos de vista muy diferentes en función de la situación o el problema de que se trate.

En el ámbito del "Pensamiento Matemático Avanzado", que actualmente se integra en la Teoría APOE (Acción-Proceso-Objeto-Esquema) se está elaborando un modelo de la estructura de los conceptos matemáticos y se plantean problemas didácticos tales como:

PP7. *¿Cómo construir un concepto determinado de manera que integre sus diferentes aspectos o significados como componentes de un mismo objeto matemático, por ejemplo, del objeto “variable o “ecuación”?*

Aparece así un intento de modelizar la estructura y la dinámica de las “entidades conceptuales”, a través de la “encapsulación”, o “reificación” de un sistema de acciones interiorizado (o proceso mental). Se trata de considerar una “entidad conceptual” como un “objeto cognitivo” del cual el sistema mental tiene procedimientos que permiten, en un determinado momento, tomar ese objeto como un argumento. Los objetos matemáticos pueden ser considerados y tratados bien como objetos mentales “conceptos” o como “procesos” o transformaciones de otros objetos matemáticos. Este doble papel –objeto/proceso– que puede jugar un objeto matemático hace necesaria cierta flexibilidad para pasar del pensamiento matemático elemental al “avanzado”. Harel y Kaput (1998) describen algunas de las circunstancias en que ciertas entidades conceptuales son construidas, creadas y usadas y cuál puede ser su función cognitiva, su función proceptual.

Basándose en esta teoría, Trigueros (1997) detalla la noción de *variable* como “entidad conceptual”, analizando su lugar en la enseñanza y las concepciones que los alumnos que comienzan los estudios universitarios tienen de este objeto matemático.

Otro problema didáctico referente al *sentido* de las manipulaciones algebraicas puede enunciarse como sigue:

PP8. *¿Qué quiere decir que el alumno no da sentido a las escrituras algebraicas? ¿Qué es una escritura? ¿Qué significa atribuir sentido? ¿Qué papel juega la interacción entre el sentido y la denotación de las expresiones simbólicas en el pensamiento algebraico en situación de resolución de problemas? En particular, ¿qué papel juega dicha interacción durante el proceso de asignar nombres a los elementos del problema?*

Algunos autores, como Arzarello-Bazzini-Chiappini (1994), utilizan el triángulo semiótico de Frege (1892) para distinguir entre *sentido* y *denotación* (o *referencia*) de una expresión algebraica. Mientras la *denotación de una expresión algebraica* se identifica con el conjunto numérico (o con la función) que representa dicha expresión, el *sentido de una expresión* se identifica con la forma cómo dicho conjunto (o función) viene dado mediante la expresión simbólica en cuestión. En el caso de las expresiones algebraicas puede hablarse de *sentido algebraico* como sinónimo de "estructura algebraica"; así la expresión:

$$2\,(2x + 1)$$

tiene diferente *sentido algebraico* que la expresión:

$$4x + 2$$

porque dichas expresiones involucran reglas computacionales diferentes, aunque *denotan el mismo conjunto numérico* (o la misma función). Uno de los nuevos tipos de problemas de investigación didáctica que se plantea en esta perspectiva, puede formularse como sigue:

PP9. *¿Cómo podemos describir mediante un modelo lingüístico, una gramática, los "sistemas" de "Escrituras Simbólicas en Álgebra elemental"? O bien, ¿cómo elaborar un sistema que modelice las prácticas efectivas de los "expertos" en el dominio del cálculo algebraico elemental formal?*

El estudio de Drouhard (1995, pp. 325-334) resume los trabajos realizados en este ámbito, señalando que las escrituras simbólicas no son objetos materiales, son objetos abstractos, aunque representen objetos provenientes de un contexto. Las escrituras deben estar bien formadas, pero no es necesario que tengan lo que ordinariamente llamamos "sentido". Las "Escrituras Simbólicas del Álgebra elemental" forman un lenguaje en el sentido de Chomsky, es decir, sucesiones de caracteres bien formados generadas por una gramática, por un conjunto de reglas de escritura. Asumir que las escrituras simbólicas en álgebra forman un lenguaje, conduce a explicitar una gramática susceptible de engendrarlas. Por otra parte, la actividad algebraica no consiste solamente en realizar manipulaciones mecánicas de escrituras, el sujeto debe hacer elecciones de transformaciones. Y es precisamente en las justificaciones que dan cuenta de sus elecciones, donde el cálculo simbólico toma todo su sentido, es decir, el aspecto semántico se sitúa en el nivel de los porqué y procede de una triple relación entre los aspectos gramaticales (reglas), el contexto pragmático (por qué hacer) y las matemáticas subyacentes (pertinencia de las propiedades aplicadas).

4.3. El problema del significado

En la compleja evolución de la problemática del *significado*, puede observarse una ampliación progresiva de los "objetos" que son susceptibles de tener un "significado". A los "conceptos" y los "métodos", se añaden las "expresiones bien formadas" y algunos objetos matemáticos relativamente puntuales como, por ejemplo, el "signo igual", la "variable" o la "ecuación", entre otros. Se acaba por intentar adjudicar un *significado* a objetos mucho más globales como son el "lenguaje simbólico", las "ideas algebraicas" y los propios "problemas".

Esta evolución del conjunto de objetos susceptibles de tener significado, lejos de ser fortuita, pone de manifiesto cómo evoluciona paralelamente la manera de interpretar el álgebra en el ámbito de la matemática escolar. Se pasa de considerar el álgebra como un *lenguaje que puede ser enseñado* —y por lo tanto el *lenguaje algebraico* es el objeto principal de la investigación— a interpretarla como el *instrumento principal* de una actividad matemática más rica que es considerada esencialmente como una *actividad de resolución de problemas* —y, en este caso, el objeto primario de la investigación es *el papel del instrumento algebraico* en la *actividad matemática*. En la medida que la citada *actividad matemática* toma un papel central entre los objetos de estudio, podemos hablar (desde el punto de vista de nuestra reconstrucción racional) de "perspectivas próximas al enfoque antropológico"; y en la medida que dichas perspectivas siguen propugnando la necesidad de utilizar nociones semióticas y/o cognitivas como *nociones primitivas* para completar o profundizar el análisis antropológico de los hechos didácticos, hablaremos de perspectivas "semiótico-antropológica" y/o "cognitivo-antropológica".

Godino y Batanero (1998) dan un paso decidido en esta dirección subrayando la necesidad de progresar en el desarrollo de una *semiótica específica* que estudie los sistemas de signos matemáticos puestos en juego en el seno de los sistemas didácticos. Proponen asignar un "significado" no sólo a las *entidades conceptuales* o *generalizaciones* (*significado intensional*) y a los *medios expresivos* (*significado notacional*), sino también a un tercer tipo de entidades u objetos matemáticos que denominan *situaciones-problema* (*significado extensional*).

Se pretende de esta forma complementar el enfoque antropológico de lo didáctico, propuesto por Chevallard (1992), subrayando la importancia especial de los *procesos semióticos* y, en particular, (re)introduciendo como objeto primario de investigación el *acto interpretativo* involucrado en toda función semiótica y que, según los autores, puede ser equiparado al "*acto de comprensión*" descrito por Sierpinska (1994). Desde esta *perspectiva semiótico-antropológica* aparece un nuevo tipo de problemas de investigación didáctica, que simbolizamos con PSA, y que podemos formular en los siguientes términos:

PSA. *¿Cuáles son los significados institucionales asociados al uso del término "álgebra" en los distintos niveles de la Enseñanza Secundaria? ¿Cuáles son los significados personales de los alumnos en lo que se refiere al "álgebra" en sus respectivos contextos institucionales? ¿Qué cambios instruccionales podrían realizarse para mejorar el acoplamiento progresivo de los significados institucionales y personales con relación al álgebra en la Enseñanza Secundaria?*

Este acercamiento hacia la actividad matemática considerada globalmente provoca no sólo una importante ampliación de la problemática del significado, sino un cambio profundo de la misma, situándola a medio camino entre las *perspectivas psicolingüísticas* y la *Teoría Antropológica de lo Didáctico* (que describiremos en el capítulo II).

Surgen nuevas cuestiones relacionadas con la naturaleza de la actividad matemática: ¿es reducible a ciertos *procesos semióticos*? ¿puede ser analizada en términos de los correspondientes *procesos cognitivos*? ¿cuál es, en definitiva, el papel de la dimensión *semiótico-cognitiva* en el análisis didáctico de la actividad matemática? En Boero (1996) se abordan algunas de estas cuestiones poniendo el acento en el *papel de las transformaciones algebraicas en la actividad matemática* (en especial, en la actividad de resolución de problemas) y su relación con los *procesos cognitivos* que dichas transformaciones requieren. Desde una *perspectiva* que nos atrevemos a denominar "*cognitivo-antropológica*", puesto que se utilizan explícitamente elementos del enfoque antropológico al lado de determinados análisis cognitivos, se plantean nuevos problemas de investigación, que denotamos con la abreviatura PCA:

PCA1. *¿Cómo depende la posibilidad de escribir expresiones algebraicas útiles para resolver un problema, de la relación dialéctica que se establece entre los dos polos de la actividad: el dominio de los* patrones estándar *de transformación de fórmulas algebraicas y la utilización de la anticipación*[5]*?*

[5] Según Boero (1996) la "*anticipación*" es el *proceso mental* a través del cual el sujeto prevé la configuración final –y /o alguna configuración intermedia- de una expresión

PCA2. *¿En base a qué criterios deberían revisarse y discutirse las tradiciones de los países en los que domina el tratamiento* lógico-algebraico *de las inecuaciones con la técnica de la tabla de "concordancia de signos"? ¿Cuáles son las potencialidades del tratamiento* funcional *de las inecuaciones, en comparación con el tratamiento lógico-algebraico, en términos de desarrollo intelectual?*

Para Paolo Boero los criterios para responder a la primera cuestión no pueden provenir únicamente de un análisis de lo que aportan respectivamente los tratamientos lógico-algebraico y funcional en términos de *técnicas matemáticas* y *clases de problemas* que éstas permiten resolver. Es necesario, además, incluir una perspectiva del "desarrollo intelectual" en términos de pérdidas y ganancias. El tratamiento *funcional* sería preferible porque potencia ciertos procesos cognitivos de *exploración dinámica* de la situación-problema y porque provoca la *gestión explícita de las relaciones lógico-verbales de determinados enunciados*, mientras que el tratamiento lógico-algebraico carece de la posibilidad de potenciar dichos procesos.

5. RESUMEN

En este primer capítulo hemos revisado algunos trabajos de investigación que han abordado el problema didáctico del *álgebra escolar*. Corresponde a lo que habitualmente se conoce como el "estado de la cuestión", a los estudios previos que existen sobre nuestro tema.
Para poder "organizar u "ordenar" los problemas abordados en este ámbito hemos tomado como modelo de referencia los *Programas de Investigación* de Lakatos, postulando una posible evolución de las teorías didácticas que forman parte de dichos Programas a través de los cambios producidos en el *núcleo firme*, en el *cinturón protector*, en las *heurística positiva* y en la *heurística negativa*, lo que conduce a reformulaciones sucesivas de los problemas didácticos que surgen en el ámbito del *álgebra escolar*.

---

algebraica útil para resolver el problema, así como la dirección general de las transformaciones necesarias para alcanzar dicha resolución. Podría considerarse un proceso metacognitivo (Schoenfeld, 1985).

CAPITULO II

EL PROBLEMA DIDÁCTICO DEL *ÁLGEBRA ESCOLAR* EN EL PROGRAMA EPISTEMOLÓGICO

1. NECESIDAD DE UN MODELO DEL *ÁLGEBRA ESCOLAR*

Todas las aproximaciones descritas anteriormente, desde las puramente *conceptualistas* a las *psicolingüísticas*, tienen en común un rasgo esencial ya enunciado: asumen o, cuanto menos, no cuestionan de manera explícita el modelo de *álgebra escolar* dominante en las instituciones docentes. Como veremos en los próximos capítulos, la institución escolar tiende a identificar el *álgebra escolar* con lo que se considera una "*aritmética generalizada*". Y dado que los enfoques que se sitúan dentro del Programa Cognitivo centran su *objeto primario de investigación* en los *procesos cognitivos de los sujetos*, no se cuestionan suficientemente el *marco de referencia aritmético* en el que el *álgebra escolar* queda habitualmente encerrada.

La importancia de esta limitación reside en el hecho de que impide tomar como *objeto primario de estudio* las cuestiones que hacen referencia a la *organización matemática del álgebra escolar.* Por ejemplo, en un marco estrictamente cognitivo, no se consideran prioritarias cuestiones del tipo:

- *¿Por qué la introducción al álgebra escolar siempre está ligada a la aritmética?*

- *¿Qué consecuencias tiene el hecho de que determinadas instituciones escolares identifiquen el álgebra escolar con una "aritmética generalizada"?*
- *¿Cómo se relaciona este fenómeno con el fenómeno, aparentemente inverso, de la "algebrización de la aritmética escolar" que conduce a introducir en la enseñanza de las matemáticas en Primaria formalismos propios del trabajo algebraico innecesarios para el trabajo aritmético que se lleva a cabo?*
- *¿Cuál es la relación entre el lenguaje funcional y el lenguaje algebraico? ¿Por qué las fórmulas que aparecen en el trabajo algebraico de Secundaria no se retoman en el momento de introducir el estudio de funciones?*
- *¿Cómo se relaciona este hecho con la "atomización" del corpus del álgebra enseñada y su desvinculación tanto del tema de la proporcionalidad y medida de magnitudes como del de las funciones?*
- *¿Por qué, en el álgebra escolar, la aparición de los parámetros queda restringida a ciertos ámbitos muy concretos como la resolución de sistemas de ecuaciones lineales al final de la Secundaria?*

Para poder tratar estas cuestiones se necesita un *modelo del álgebra elemental* elaborado desde la propia didáctica que sirva, en particular, como punto de referencia para describir y analizar la forma de interpretar el álgebra en la Enseñanza Secundaria. El Programa Epistemológico en Didáctica de las Matemáticas, iniciado con los trabajos de Guy Brousseau sobre la Teoría de las Situaciones Didácticas de finales de los años 70, asume esta necesidad desde el momento en el que se propone abrir una nueva vía de acceso al estudio de los fenómenos didácticos a través de la *modelización explícita del saber matemático enseñado*.

De esta forma se genera no sólo una ampliación del Programa Cognitivo, sino lo que Lakatos llama una *ruptura epistemológica*, al producirse un cambio sustancial en una de las componentes del núcleo firme de dicho programa, con el consiguiente aumento de su *poder heurístico*. En efecto, con la llegada del Programa Epistemológico, el conocimiento matemático en sí mismo deja de ser transparente y, en consecuencia, la *actividad matemática escolar* pasa a ser considerada el objeto primario de investigación. Se supera así la "ilusión de transparencia" del saber enseñado, tan denunciada por Yves Chevallard en su trabajo sobre la transposición didáctica (1985).

Como veremos, este aumento del poder heurístico vendrá corroborado por la aparición de nuevos tipos de problemas, de nuevas teorías auxiliares y con la anticipación de hechos y fenómenos nuevos. Surge por primera vez la noción de fenómeno didáctico irreductible a los fenómenos psicológicos, sociológicos o lingüísticos asociados. La emergencia de los fenómenos didácticos (o didáctico-matemáticos) es una característica del Programa Epistemológico y comporta la consiguiente emergencia de los problemas didáctico-matemáticos dado que, en toda disciplina científica, cada tipo de problemas hace referencia a un aspecto de un fenómeno.

Señalemos además que, muchos trabajos que se sitúan inequívocamente en el Programa Cognitivo apuntan la necesidad de una reflexión teórica sobre la naturaleza del álgebra enseñada. Por ejemplo, Caroline Kieran y Eugenio Filloy (1989) señalan la falta de modelos teóricos que permitan cuestionar "el conjunto de supuestos de base [...] y la decisión de lo que se toma como evidencia".

En la misma línea, Kaput (1996), en un estudio sobre la reforma del álgebra escolar, plantea en primer lugar la necesidad de una línea de investigación que sustente dicha reforma, y en la que una de las cuestiones previas sea "¿qué clase de álgebra hay que enseñar?". Entendemos que vuelve a aparecer un cuestionamiento del conocimiento matemático, hasta ahora transparente, que consolida y refuerza la necesidad del Programa Epistemológico en el que situaremos nuestro trabajo.

En resumen, el Programa Epistemológico postula que, para poder analizar y tratar las cuestiones relacionadas con la enseñanza y aprendizaje del *álgebra escolar*, se necesita elaborar en primer lugar un *modelo del álgebra escolar* construido desde la propia didáctica de las matemáticas. Este modelo será uno de los instrumentos teóricos para describir y analizar el modelo dominante en la Enseñanza Secundaria, así como todos los fenómenos didácticos que emerjan del proceso de estudio del *álgebra escolar.*

2. LA TEORIA DE LAS SITUACIONES DIDÁCTICAS Y EL *ÁLGEBRA ESCOLAR*

El nacimiento del Programa Epistemológico coincide con los trabajos de Guy Brousseau y la publicación de las primeras versiones de la Teoría de las Situaciones (1979). Para Brousseau (1995), la Teoría de las Situaciones sitúa a la didáctica de las matemáticas en el marco de "una ciencia de las condiciones de la producción y de la difusión de saberes útiles a la sociedad y a las necesidades demandadas por los hombres", ensanchando el marco escolar y ampliando su objeto de estudio más allá de las prácticas matemáticas escolares.

Como ya hemos señalado, la originalidad de este nuevo programa está en tomar como objeto primario de estudio no sólo al sujeto que aprende o al sujeto que enseña, sino al conocimiento matemático que ambos construyen en cooperación. Se propone por lo tanto cuestionar, modelizar y problematizar, según las reglas de la actividad científica, tanto el conocimiento matemático como la actividad matemática realizada en el proyecto común de estudio, es decir, la actividad matemática realizada conjuntamente por el sujeto que aprende y el sujeto que enseña en una institución determinada.

Este principio metodológico que sitúa en primer lugar la cuestión de la modelización de la actividad matemática ha representado una verdadera revolución en la investigación en didáctica de las matemáticas. Hay también una segunda revolución importante: la voluntad de elaborar una ciencia de los fenómenos didácticos que explique los modelos utilizados para someterlos a la prueba de los hechos, es decir, a las leyes de una verdadera "epistemología experimental" que permita estudiar y tener en cuenta las propiedades de adaptación de los conocimientos a las restricciones de la institución.

Según Bosch y Chevallard (1999), esta doble ruptura no ha sido siempre bien interpretada por algunos investigadores que consideran que, en la Teoría de las Situaciones, la noción de *situación fundamental* sirve, ante todo, para describir y fabricar situaciones de enseñanza en clase (ingeniería didáctica), olvidando entonces que esta noción constituye, sobre todo, el instrumento clave que propone esta teoría para *caracterizar los conocimientos matemático,* se trate de conocimientos prácticos o de conocimientos a enseñar, sean explícitos y reconocidos como un saber matemático o implícitos y sólo puedan aparecer en acto. Para analizar la enseñanza y el aprendizaje de un conocimiento matemático, la Teoría de las Situaciones propone en primer lugar el problema de su descripción, problema al que hay que responder en términos *de situaciones fundamentales* relativas a ese conocimiento.

La hipótesis sostenida por Guy Brousseau (1986) sobre la existencia de una situación fundamental específica para cada conocimiento matemático forma parte de un principio teórico más amplio basado en un modelo general de las matemáticas, según el cual los conocimientos matemáticos pueden describirse en términos de situaciones fundamentales. El mismo Brousseau (1994) afirma, como ya hemos indicado, que "el principio fundamental de la teoría de situaciones consiste en definir un conocimiento mediante una situación, es decir, mediante un automatismo que modelice los problemas que sólo pueden resolverse de forma óptima con dicho conocimiento". Por tanto, la Teoría de las Situaciones Didácticas en adelante TSD, postula que, dado un conocimiento matemático **C**, existe una *situación fundamental* **S(C)** asociada a dicho conocimiento, esto es, un conjunto mínimo de *situaciones a-didácticas*, específicas de **C**, que permiten generar, por manipulación de los valores que toman sus *variables didácticas*, un campo de problemas **P(S(C))**, que proporciona una *representación óptima* **C'** de **C**.[6]

Finalmente, siguiendo a Bosch y Chevallard (1999), señalaremos que la Teoría de las Situaciones Didácticas todavía provoca otra ruptura epistemológica en relación al Programa Cognitivo. En efecto, a diferencia de éste, considera que las matemáticas no son un sistema conceptual que el sujeto deba construir: son, en primer lugar, una actividad que se realiza en una situación y contra un medio. Además, se trata de una actividad estructurada, en la que se pueden distinguir diferentes fases: la acción, la formulación y la validación, a las que se añaden la devolución y la institucionalización.

En cuanto al modelo docente que se sustenta en este modelo epistemológico de las matemáticas, hay que decir que, en la Teoría de las Situaciones, la actuación del profesor es una *mediación indirecta* que se lleva a cabo esencialmente mediante la estructuración y la gestión de la *situación didáctica* en la que están inmersos los estudiantes, así como mediante la gestión del *contrato didáctico* que rige las "reglas del juego" en dicha situación.

Uno de los prototipos de problemas que se construyen en la TSD puede expresarse en los siguientes términos:

[6] No entraremos aquí a presentar los principios de la Teoría de las Situaciones Didácticas. Para ello remitimos al compendio de trabajos de Brousseau (1998).

TSD. *Dado un conocimiento matemático C, ¿cuál es la situación fundamental que lo modeliza, es decir que permite generarlo, qué condiciones debe satisfacer una situación para que la acción del sujeto en su seno le conduzca a movilizar (construir o reconstruir) el conocimiento matemático considerado?*

En particular, nuestro problema de investigación en torno al *álgebra escolar*, se podría formular de forma sintética, en el marco de la TSD, preguntándonos:

TSD1. *¿Cuál es la situación fundamental del álgebra escolar?*

Este problema didáctico no tiene actualmente una solución conocida. Según Chevallard, Bosch y Gascón (1997, p. 194): "No parece que exista un acuerdo unánime sobre lo que sería una situación óptima para que los alumnos de secundaria puedan pasar del estudio de la obra aritmética al estudio de la obra algebraica".

Una versión más explícita del problema del álgebra escolar en la TSD podría enunciarse en los siguientes términos:

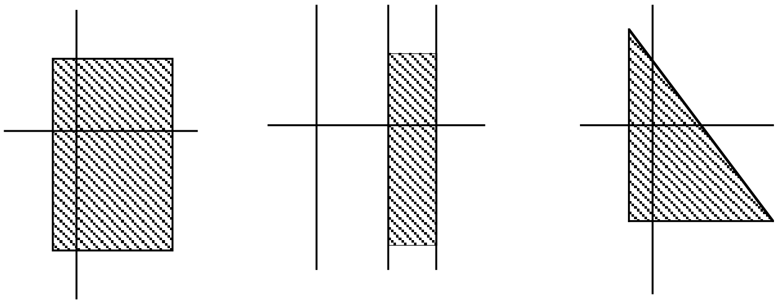
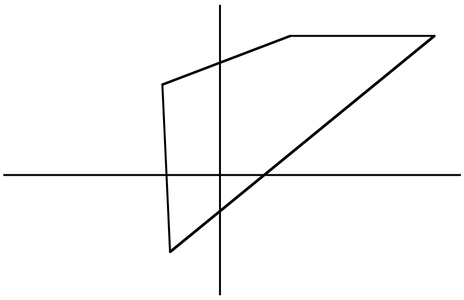
TSD2. *¿Cómo encontrar situaciones realmente específicas de los diferentes modelos implícitos del álgebra elemental y organizar a la vez estas situaciones y estos modelos de manera que hagan posible una génesis adecuada de dicho conocimiento?*

En el trabajo de tesis realizado por Mercedes Díez (1995) en el marco de la TSD, se hace un intento de construir una situación fundamental que modelice la noción de desigualdad o, más concretamente, la noción de inecuación. Bajo el título "Construcción de lecciones sobre inecuaciones", la autora (Díez, 1995, p. 625) presenta una ingeniería didáctica formada por juegos o situaciones en las que se trata de introducir desigualdades del tipo:

$$y > k \;;\; x < p \;;\; a < y < c \;;\; y < x + b$$

Estas situaciones proponen básicamente problemas concretos en torno a semiplanos o regiones del plano limitadas por rectas y curvas, siendo en la fase de comunicación y debate cuando emerge la necesidad de las desigualdades algebraicas. Por ejemplo:

La consigna del profesor es la siguiente:

> Queremos llegar a expresar, mediante una condición algebraica, las distintas zonas del plano con ayuda de los ejes de coordenadas. Y realiza los dibujos siguientes:
>
> 
>
> Queremos navegar libremente y sin peligro, pero no disponemos de una carta de navegación. Sabemos que debemos evitar las zonas de arrecifes. En el centro de navegación pueden ayudarnos, pues poseen planos donde está marcada la zona de los arrecifes. Nos dicen que tiene forma de cuadrilátero irregular (se adjunta la figura)
>
> 
>
> El juego consiste en ir conociendo la mayor zona de navegación. […]. Los jugadores solicitan información por escrito al centro de navegación que conoce la situación de los arrecifes (Ibid, p. 685).

Podemos afirmar, aunque en el trabajo mencionado no se formule en estos términos, que la hipótesis subyacente a esta ingeniería consiste en definir el *"álgebra de las desigualdades"* como un conocimiento que surge en situaciones de comunicación y validación, y no en situaciones de acción. Quedarían por determinar las condiciones necesarias –es decir, los tipos de situaciones de acción– que permiten provocar, bajo ciertas restricciones, la aparición de la escritura de desigualdades algebraicas.

Dentro del ámbito del *álgebra escolar*, los trabajos recientes de la TSD (Broin, 2002) se han centrado fundamentalmente en la caracterización del lenguaje algebraico a partir de la llamada *"álgebra sagital"* lo que permitirá introducir diferenciaciones entre objetos del trabajo matemático que la enseñanza actual de la aritmética no permite distinguir. Además, esta misma autora en su trabajo de tesis aborda, con los instrumentos de la **TSD**, el problema de la relación entre la "aritmética" y el "álgebra" dentro del currículum escolar. Dicho problema puede reformularse en los siguientes términos:

> *¿Cómo reconstruir el corpus de los conocimientos algebraicos en la ESO de manera que éstos permitiesen retomar y reemplazar los conocimientos de la cultura aritmética clásica?*

Se trata de un aspecto central del problema del *álgebra escolar* que, como tal, ya fue tratado por Yves Chevallard en el ámbito del enfoque antropológico proponiendo como "semántica" del cálculo algebraico las manipulaciones "aritméticas" de los programas de cálculo. En el ámbito de la Teoría Antropológica de lo Didáctico, en su estado actual de desarrollo, podemos considerar el citado problema como un caso particular del problema de integrar en el currículum de la ESO el estudio conjunto de una organización matemática y la que resulta de ésta mediante un proceso de algebrización. Se trata de un problema que recorre todo nuestro trabajo y al que responderemos parcialmente en los capítulos V y VI.

3. PRIMERAS APORTACIONES DE LA TEORÍA ANTROPOLÓGICA AL PROBLEMA DEL *ÁLGEBRA ESCOLAR*

En el marco del Programa Epistemológico, pronto se puso de manifiesto que no era posible interpretar adecuadamente la *actividad matemática escolar* sin tener en cuenta los fenómenos relacionados con la *reconstrucción escolar de las matemáticas* que tienen su origen en la propia institución de producción del saber matemático. Se descubrió, en definitiva, que muchos de los fenómenos relativos a la *enseñanza de las matemáticas* sólo pueden abordarse científicamente si se tienen en cuenta los fenómenos de *transposición didáctica* (Chevallard 1985 y 1991), es decir, los fenómenos que regulan las transformaciones que sufre el saber matemático producido en la institución "sabia", para convertirlo en saber matemático "apto para ser enseñado".

Surge así lo que inicialmente se denominó el *enfoque antropológico en didáctica de las matemáticas,* que integra la actividad matemática escolar en la problemática, mucho más amplia, de las *actividades matemáticas institucionales,* que pasan a constituir el nuevo y más extenso *objeto primario* de la investigación didáctica. Los *modelos docentes* serán considerados como la particularización, al caso de las instituciones escolares, de un *modelo general de la transposición institucional de los conocimientos matemáticos*.

3.1. El álgebra elemental como dominio de investigación didáctica

En las investigaciones relativas al *álgebra elemental* llevadas a cabo desde el enfoque antropológico existe una primera etapa que culmina con la publicación, a finales de 1989, de la *Note de synthèse pour l'habilitation à diriger des recherches* del profesor Yves Chevallard (1989b). Este trabajo puede considerarse, entre otras cosas, como la *construcción de un dominio de investigación didáctica* y constituye la base sobre la que se sustenta nuestra investigación.

El enfoque antropológico postula, desde sus inicios, que la *actividad de modelización matemática* es el núcleo de la actividad matemática. Este postulado le lleva a introducir en la descripción de la actividad (intra)matemática las nociones básicas de la modelización matemática. En particular se habla de la *producción de conocimientos* (matemáticos) *relativos a un sistema* (matemático), gracias a la utilización de un *modelo matemático* de dicho sistema. De esta forma, se puede dar un sentido nuevo a la afirmación según la cual *"las matemáticas son una ciencia experimental"*.

Este postulado se refiere, en primer término, a la matemática como ciencia "pura" y, sólo en segundo término, a la matemática como ciencia "aplicada". Aunque, en realidad, lo que pretende es mostrar lo inadecuado de tal distinción. Es decir, se postula que *toda* actividad matemática puede ser interpretada como una actividad de modelización. Los sistemas que se modelizan pueden ser:

"aritméticos": Estudiar, por ejemplo, la conjetura de Fermat $x^n + y^n = z^n$ mediante modelos que proporcionan las curvas elípticas

"geométricos": Estudiar, por ejemplo, el plano euclídeo mediante el modelo axiomático de Hilbert "topológicos": Estudiar, por ejemplo, ciertos tipos de variedades topológicas asignándoles invariantes algebraicos, etc.

Los sistemas que se modelizan matemáticamente *también* pueden ser sistemas "extramatemáticos": físicos, biológicos, sociales, psicológicos, económicos, etc.

Una característica fundamental de esta modelización intramatemática es su carácter "constitutivo" del propio conocimiento matemático, en lugar de ser una simple "aplicación" de éste. Así, por ejemplo, puede decirse que el *cálculo algebraico* como actividad matemática es un *elemento esencial de la construcción de lo numérico* (tanto en la génesis histórica como en la teoría matemática) más que un simple epifenómeno, o consecuencia secundaria de lo numérico. Se pone así de manifiesto el carácter problemático, en el sentido de problema no resuelto, de las *relaciones entre lo algebraico y lo numérico.*

Surge, por lo tanto, un primer problema fuertemente relacionado con el que aborda Dominique Broin con los instrumentos de la TSD. En el ámbito de del Enfoque Antropológico, en adelante EA, y sin salirnos del Programa Epistemológico podemos formular dicho problema como sigue:

EA1. *¿Cuáles son las relaciones posibles entre lo algebraico y lo numérico en la Enseñanza Obligatoria? ¿Es posible la introducción del álgebra elemental en un marco diferente del marco aritmético habitual en el que lo algebraico es considerado como un epifenómeno de lo numérico?*

El estudio de este problema constituirá uno de los caminos para abordar el *problema didáctico de la enseñanza del álgebra* desde la perspectiva antropológica. Para iniciar dicho estudio, Chevallard y sus colaboradores diseñaron y experimentaron una secuencia de enseñanza que tomaba el *cálculo algebraico* como *instrumento* para la construcción de lo numérico y algunas de las propiedades más elementales de los *números naturales* como *objeto* de estudio para los alumnos.[7]

El punto de vista respecto a la naturaleza de los números era "*realista*" en contraposición a la tendencia "*constructivista*": se supone que los números son objetos que ya existen y que, por tanto, no es preciso "construir", sino sólo "describir" y "simbolizar" de tal forma que permitan ser estudiados. En otra experiencia, suponiendo conocidos los

[7] Jullien, 1984.

"números relativos" (en 4º curso de la enseñanza secundaria francesa: 15-16 años), se trataba de describir los números racionales con ayuda del cálculo algebraico:

> Utilizando el instrumento del *cálculo ecuacional* se describen los números racionales x como aquellos que satisfacen una ecuación del tipo:
>
> $$a \cdot x = b \quad (a, b \in \mathrm{Z};\ a \neq 0)$$
>
> y el propio cálculo ecuacional permite estudiar de una forma muy sencilla las principales propiedades de los números racionales y de sus operaciones.

El alumno se encuentra de esta manera en un escenario de trabajo muy diferente del tradicional. De esta forma se creó un observatorio didáctico en el que fue posible estudiar los fenómenos didácticos derivados tanto del "*funcionamiento didáctico de lo algebraico*" como del "*funcionamiento de los alumnos a propósito de lo algebraico*" en un marco diferente del "marco aritmético de referencia".

Al tomar la *actividad algebraica* como un *instrumento de modelización matemática*, aparece un problema didáctico esencial:

EA2. *¿Cuál es el nivel de determinación didáctica adecuado para plantear la problemática de la investigación didáctica sobre la enseñanza del álgebra elemental? ¿El nivel puntual, de las ecuaciones y su resolución, el de los sistemas de ecuaciones y su resolución, el de las manipulaciones o, incluso un nivel más pequeño, el de la variable, el del signo igual, el del significado de las expresiones simbólicas, el de los conceptos, ...? ¿O, por el contrario, debemos plantear el problema a un nivel más amplio, regional, que abarque, por ejemplo, el papel de los problemas "verbales" y de la modelización matemática en la Enseñanza Secundaria?*

El estudio de este problema puso de manifiesto que para entender lo que pasa en los Sistemas Didácticos es preciso tomar en cuenta el Sistema de Enseñanza de las Matemáticas (SEM) en su conjunto, integrado en la sociedad y su cultura. A través de la noción de "*noosfera del sistema de enseñanza*", introducida por Chevallard (1985) en el contexto de la teoría de la transposición didáctica para designar la esfera donde se piensa el funcionamiento del sistema didáctico, se filtra la interacción entre el sistema de enseñanza y el medio social. En la *noosfera* se encuentran y discuten los "representantes" del sistema de enseñanza, desde el presidente de una asociación de enseñantes al simple profesor militante, con los "representantes" de la sociedad, los padres de los alumnos, los especialistas de la disciplina que militan en torno de su enseñanza, los emisarios del órgano político, etc. El desarrollo de este estudio constituyó el primer ejemplo de *estudio* (*macro*)-*ecológico de las condiciones de posibilidad de un tipo dado de fenómenos didácticos en un entorno determinado.*

3.2. La problemática ecológica de los objetos algebraicos

El *análisis ecológico de los conocimientos matemáticos,* es decir, el estudio de sus condiciones de existencia y evolución en un entorno institucional dado, a saber, la escuela, la comunidad investigadora, un determinado ámbito profesional, la sociedad en general, etc., puso de manifiesto la *relatividad institucional de los conocimientos matemáticos* y originó una crítica de la presunta *universalidad abstracta y a-institucional de los conceptos*. "Conocer un concepto", en el sentido escolar, se refiere siempre a una lista muy concreta de sus *empleos modelizadores* y de *interrelaciones* con otros conceptos, técnicas, problemas y aplicaciones, siendo dicha lista el resultado de los procesos de transposición didáctica. Fue precisamente a consecuencia de este tipo de análisis como surgió la teorización en términos de "*relación al saber*" dentro del enfoque antropológico. Aparecen entonces otros problemas nuevos relativos al "entorno ecológico" del *álgebra escolar*:

EA3. *¿Qué papel juegan la noosfera, la sociedad y la cultura en la construcción del saber matemático enseñado? ¿Qué papel han jugado en el caso particular del álgebra escolar? ¿Cómo es considerada el álgebra en la cultura occidental?*

Chevallard muestra que la sociedad tiende a exigir del sistema de enseñanza que todo elemento de saber que se enseña, al menos durante la enseñanza obligatoria, se deje traducir en términos compatibles con la *epistemología cultural corriente*, de manera que las únicas modelizaciones aceptables por la cultura son aquellas que pueden reducirse a *modelos "concretos"*, esto es, culturalmente familiares y naturalizados por la cultura hasta aparecer como los únicos "pensables". De esta forma se han naturalizado, por ejemplo, las situaciones culturalmente reconocidas para modelizar los números negativos: "ingresos/deudas", "altura sobre el nivel del mar/profundidad bajo el nivel del mar", "años antes/años después (del inicio de nuestra era)", y unas pocas más.

Recíprocamente, la cultura corriente no puede absorber aquellos objetos de enseñanza que no son susceptibles de dicha reducción a modelos “concretos”, es decir, no puede absorber aquellos objetos cuya significación sólo pueda emerger, como en el caso de los objetos algebraicos, en una práctica matemática. Esta es la razón por la cual la cultura corriente, que sólo dispone de los modelos antes citados de los números negativos, se pregunta inútilmente, desde hace siglos, porqué “*menos por menos da más*”.

Como consecuencia de esta *presión cultural* se produce una reducción de los objetos de enseñanza a determinados modelos “concretos”. En el caso del álgebra esta reducción es especialmente importante y distorsionadora puesto que ésta es muy difícilmente traducible-reducible a modelos culturalmente familiares. Se origina así una *desnaturalización matemática de los objetos algebraicos* que se pone de manifiesto en la aparición de múltiples *artefactos didácticos de origen cultural*. Así, para enseñar las ecuaciones de primer grado con una incógnita se introducen en clase multitud de objetos auxiliares como, por ejemplo, la balanza. Se trata de objetos no enseñados como tales, pero culturalmente –que no científicamente– más familiares y, por tanto, supuestamente facilitadores del aprendizaje.

3.3. Restricciones culturales a la enseñanza del álgebra elemental

Esta actitud lleva a *condenar aquellas obras matemáticas que no se dejan fácilmente* “*culturizar*”. El álgebra es un ejemplo paradigmático de tales obras y, por eso, se le atribuyen distintas connotaciones: “mecánica”, alejada del pensamiento “vivo”, poco “concreta” y, por tanto, difícilmente “pensable”, el álgebra no ha sido nunca realmente aceptada por la cultura occidental, en contraposición a la *geometría* que ha sido vista por la cultura como el *triunfo del* “*pensamiento*”. Esta *consideración peyorativa de la cultura*[8] *hacia el álgebra* contrasta con la importancia central que ocupa lo algebraico en lo matemático y, en particular, con el papel crucial del álgebra en el desarrollo de la geometría.

[8] Se trata de una peyoración *cultural*, de la *cultura dominante*, que no científica. Toda disciplina matemática, y especialmente el álgebra, choca frontalmente con las características definitorias de la información tal como ésta ha sido redefinida por la televisión. Dichas características pueden resumirse en tres puntos: (1) ver es comprender; (2) la instantaneidad es la medida óptima del tiempo informativo; (3) el único criterio de veracidad consiste en que otras fuentes de información repitan las mismas afirmaciones y, con ello, las “confirmen” (Ramonet, 1996, citado en Gascón 1999b).

EA4. *¿Cuál es la pertinencia didáctica actual del instrumento algebraico?*
¿Es preciso seguir enseñando álgebra en la enseñanza obligatoria?

A pesar de la pertinencia histórica innegable del álgebra, podría suceder que el instrumento algebraico hubiese perdido en la actualidad toda pertinencia como objetivo didáctico y también como instrumento del trabajo matemático del alumno. Pero esto no sólo no es así sino que, por el contrario, lo algebraico acrecienta día a día su valor paradigmático como iniciación imprescindible a una *dimensión esencial de toda praxis científica*: *el papel a la vez instrumental y constitutivo de los formalismos de toda ciencia*.

3.4. La desalgebrización del currículum escolar

Surge así un nuevo problema:

EA5. *¿Cómo se plantean, en términos de la problemática ecológica, los problemas de investigación didáctica relativos a la enseñanza y el aprendizaje de lo algebraico?*

En la *problemática ecológica* el problema principal es el del *análisis de la estructura, el funcionamiento y la ecología de la relación institucional a lo algebraico*. En el marco del Programa Epistemológico el estudio de la *relación personal del alumno a lo algebraico* es prácticamente fundamental pero epistemológicamente secundario para la didáctica de las matemáticas. Mientras que las diversas perspectivas del Programa Cognitivo se centran en el sujeto y reducen la relación personal del alumno al álgebra a una "*actualización*" *de presuntas concepciones preexistentes*, el enfoque antropológico (en coherencia con los postulados básicos del Programa Epistemológico) intenta explicar dicha relación personal como un *emergente de la praxis del alumno como persona*, tomando en consideración sus diferentes sujeciones a las diversas instituciones. El estudiante no debe confundirse con un "*sujeto cognitivo*", ni tampoco con un mero "*sujeto epistémico*" (en el sentido estrecho de la epistemología clásica), es preciso abarcar toda la complejidad del "*sujeto didáctico*" (Artigue, 1990).

Para llevar a cabo el análisis de la *ecología de lo algebraico en los sistemas didácticos* se utilizan diversos materiales empíricos (los manuales, los textos oficiales, las clases, ...) y se subrayan las diferencias respecto al funcionamiento de *lo algebraico como objeto de saber*; esto es, las diferencias entre el álgebra en las instituciones escolares y el álgebra en las instituciones productoras del conocimiento matemático. Estas diferencias pueden resumirse en los cinco puntos siguientes:

(i) En los sistemas didácticos se rompe la unidad funcional de *lo algebraico,* produciéndose una fuerte autonomía de los diferentes bloques y cierta *desintegración del corpus algebraico*. Por ejemplo, en las instituciones escolares se estudian en diferentes bloques, completamente independientes entre si: las ecuaciones, las "igualdades notables", las simplificaciones de expresiones algebraicas, los polinomios, las funciones y las inecuaciones. Mientras que en el trabajo matemático todos esos bloques deben integrarse en una unidad funcional para llevar a cabo, por ejemplo, el estudio de una situación concreta mediante su modelización funcional.

(ii) En la institución escolar las letras juegan únicamente el papel de incógnitas, los *parámetros están ausentes*. Consecuentemente las *fórmulas* no aparecen como el resultado de un *trabajo algebraico* ni juegan ningún papel de *modelos algebraicos*: hacen únicamente el papel de "reglas" para realizar ciertos cálculos.

(iii) Los diferentes *sistemas de números* no aparecen en los sistemas didácticos (especialmente en la ESO) como consecuencia de una construcción algebraica.

(iv) La *actividad de nominación o renominación* de las incógnitas, esto es, la introducción de nuevas letras en el curso del trabajo matemático y que es esencial en el trabajo algebraico *está totalmente ausente* la institución escolar. Así, por ejemplo, no se utilizan *cambios de variables* para simplificar expresiones, ni para resolver ecuaciones o inecuaciones, ni para representar funciones en sistemas de referencia diferentes de los determinados por las variables originales.

(v) *El trabajo sobre los objetos algebraicos*, tomándolos como objetos de estudio en sí mismos, *es prácticamente inexistente en toda la Enseñanza Secundaria*. Así, por ejemplo, se manipulan (se "resuelven", se "simplifican", se "representan") determinados objetos algebraicos (las ecuaciones, las expresiones algebraicas y las funciones), pero no se toman como objetos de estudio en sí mismos.

Este análisis sugiere un fuerte grado de *desalgebrización del currículum escolar* y plantea nuevas cuestiones que van más allá de los sistemas didácticos. Las condiciones de vida de *lo algebraico* en los sistemas didácticos, tal como han sido descritas, ¿son absolutamente necesarias o, por el contrario, son contingentes y pueden ser modificadas? Aparece, de nuevo, la necesidad de llevar a cabo un estudio ecológico más amplio que tenga en cuenta la naturaleza "abierta" del sistema didáctico para identificar las relaciones entre: *lo algebraico* en la *matemática sabia*, *lo algebraico* en la *cultura*, *lo algebraico* en las *prácticas sociales*, *lo algebraico* en la noosfera y *lo algebraico* en el *sistema de enseñanza de las matemáticas*.

EA6. *¿Cuáles son las causas últimas de la desalgebrización del currículum escolar descrita anteriormente?*

Aunque es verdad que la organización de todo currículum tiende de una manera general a la *diferenciación y autonomización interna del corpus enseñado*, este fenómeno no basta para explicar la desalgebrización del currículum descrita anteriormente en los apartados (i) al (v).

¿Cómo podemos explicar, en última instancia, este fenómeno? La conocida tesis de Chevallard (1989) se desprende de los análisis anteriores: la desalgebrización del currículum responde sobre todo a la *peyoración cultural del álgebra* que, a su vez, es una consecuencia del *logocentrismo* (J. Derrida, 1967) propio de la cultura occidental. Dicha postura metafísica sustenta implícitamente que el "*pensamiento*" reside en "la cabeza", se expresa por la *voz* y la *palabra* y se conserva mediante la *escritura*; desde esta perspectiva la escritura es sólo una degradación del pensamiento o, a lo sumo, un producto secundario del mismo.

La cultura corriente desconoce el hecho esencial de que *los formalismos científicos son lenguajes que no provienen de ningún lenguaje oral* sino que han nacido como lenguajes escritos y son muy difícilmente oralizables lo que provoca problemas didácticos específicos en la enseñanza del álgebra, por ejemplo. Así se supervalora todo lo que *se dice* o se puede decir (el "*razonamiento*") y se considera peyorativamente todo lo que únicamente *se hace*, en particular lo que únicamente *se escribe* sin ser enunciado oralmente. El *logocentrismo* supone una incomprensión profunda de la naturaleza de la actividad científica porque desprecia el papel, e incluso la existencia, de *los formalismos escritos como instrumentos del pensamiento científico*.

4. NECESIDAD DE UN MODELO ANTROPOLÓGICO DE LA ACTIVIDAD MATEMÁTICA

Como una consecuencia natural del *desarrollo de la teoría de la transposición didáctica* ha surgido la necesidad de modelizar las *prácticas matemáticas institucionales* con instrumentos suficientemente finos que permitan una descripción de dichas prácticas que haga posible el estudio de las condiciones de su realización. Esta modelización permitirá, en particular, operativizar las nociones de *relación institucional* y *relación personal al saber matemático* y ha sido abordada en los últimos desarrollos del enfoque antropológico (Chevallard, 1992, 1996, 1997 y 1999; Chevallard, Bosch y Gascón, 1997). Para abreviar, denominaremos *Teoría Antropológica de lo Didáctico*, a partir de ahora TAD, al estado actual de esta teorización que engloba y sistematiza todos los desarrollos anteriores del *enfoque antropológico*.

La TAD precisará, por tanto, explicitar un *modelo general de las matemáticas institucionales* que incluya la *matemática escolar* como un caso particular y un *modelo de las actividades matemáticas institucionales* que incluya la *enseñanza-aprendizaje escolar de las matemáticas*, como una actividad matemática institucional particular. En los últimos desarrollos de la teoría antropológica se modeliza la *matemática institucional* mediante la noción de *organización* o *praxeología matemática* y las *actividades matemáticas institucionales* se modelizan mediante la noción de *proceso de estudio de una organización matemática en el seno de una institución*, proceso de estudio que abarca y generaliza las clásicas nociones de *proceso de enseñanza-aprendizaje*, y que, a su vez, se puede describir en términos de *organización* o *praxeología didáctica*.

4.1. El modelo de actividad matemática en la TAD

La TAD parte de un *primer postulado* según el cual toda práctica institucional puede analizarse, desde diferentes puntos de vista y de diferentes formas, como un sistema de tareas relativamente bien definidas, que se fragmentan en el flujo de la práctica. El problema de la delimitación de las tareas en una práctica institucional dada queda abierto y varía según se adopte el punto de vista de la institución donde se desarrolla la práctica, o bien, el de una institución exterior desde la que se observa la actividad para describirla con un objetivo preciso.

El significado de la palabra “tarea” engloba actividades culturalmente tan distintas como tocar una pieza de Mozart al piano, calcular el producto de dos enteros, cerrar una puerta, coger el autobús, saludar a alguien, derivar una función, resolver un problema de proporcionalidad, estudiar griego antiguo, corregir las copias de un contrapunto, bailar un tango, etc. Todo, sin embargo, no son tareas: existe en toda institución actividades no analizadas en tipos de tareas y en las que la denominación mediante verbos de acción, con acepciones más amplias, por ejemplo “calcular”, “comparar”, “demostrar”, etc., dejan el contenido mal definido –se habla entonces de *géneros de tareas.*

La noción de *tarea* se restringe por un *segundo postulado* que establece que la *realización de una tarea resulta de la utilización de una técnica.* Es necesario entender el término *técnica* en un sentido amplio, como una “manera de hacer” particular relativamente compartida en una institución, y no según la acepción corriente de procedimiento estructurado y metódico, incluso algorítmico –el algoritmo es un caso muy particular de *técnica.* Existen, en efecto, *técnicas* para resolver ecuaciones de segundo y tercer grado, pero también para hacer demostraciones por recurrencia, para abrir las puertas, para conseguir una información por teléfono o por Internet, para leer un periódico, para escribir un artículo de investigación, etc. Cada día, ponemos en funcionamiento un gran número de *técnicas* para llevar a cabo diferentes tipos de *tareas*. La vida en una *institución* está hecha de un amplio abanico de *tareas* realizadas según “maneras de hacer” institucionalmente reconocidas. Aunque un mismo tipo de *tareas* puede abordarse mediante diferentes *técnicas*, se tiende a identificar cada tipo de *tareas* con la *técnica* normalmente utilizada en la *institución* para su realización.

La noción de *relación al saber*, introducida en Chevallard (1989_c) puede analizarse ahora utilizando estas nociones: en una *institución* dada, la *relación institucional* está formada y reformada por el conjunto de *tareas* que deben realizar, mediante *técnicas* determinadas, las personas que pertenecen a dicha institución. De este modo, la realización de diferentes *tareas* que el individuo se ve conducido a realizar a lo largo de su vida en las diferentes instituciones de las que es sujeto sucesivamente o simultáneamente, es lo que hará emerger su *relación personal* al *objeto* considerado.

Sin embargo, de este par amalgamado de *tipos de tareas* y de *técnicas institucionales* que configuran las *relaciones institucionales* y *personales* al saber, sólo va a quedar, desde el punto de vista de la institución, una descripción reducida, formulada en términos de "conocimientos" y "saber-hacer". Esta reducción, generalmente suficiente para describir y dirigir la vida institucional, se explica también por un fenómeno general de naturalización de las parejas *tareas-técnicas,* que nos hace vivir como *naturales* las *tareas* que se realizan normalmente en una institución. La mayor parte de *tareas* son *tareas rutinarias:* la *técnica* utilizada para resolverlas, aunque fuera construida en su día, ha sido *rutinizada* y naturalizada, hasta el punto de no aparecer más como tal puesto que su uso actual no supone ningún problema.

No obstante, en medio de las *tareas* institucionales mayoritariamente rutinizadas aparecen, tarde o temprano, tipos de *tareas problemáticas*, para las que no existe una *técnica* apropiada para su realización, sea porque el tipo de *tarea* es nuevo, bien para el sujeto o bien para la institución, o sea porque la *técnica* empleada habitualmente fracasa. Entonces, se propone la construcción de una *técnica* adecuada bien por adaptación de una *técnica* antigua o por la creación de una *técnica* nueva, a menos que el problema sea simplemente excluido y se prolongue indefinidamente el disfuncionamiento aparecido hasta el punto de naturalizarlo.

Una evolución de las *técnicas* –y a menudo un progreso– aparece cuando previamente la situación o el tipo de *tarea* se revela problemático, es decir, cuando se decide no rechazar la problematización de la *tarea* y estudiar el problema con el objetivo de construir la *técnica* necesaria. Se parte de un tipo de *tareas problemáticas,* por ejemplo:

"¿Cómo resolver una ecuación de segundo grado?"
"¿Cómo medir el tiempo?"
"¿Cómo contar el número de personas en una multitud?"
"¿Cómo introducir la noción de número decimal?"

Llegado el caso y tras un proceso de estudio más o menos largo, se llegan a producir *técnicas* nuevas que permitan proporcionar respuestas a las cuestiones propuestas inicialmente. Un nuevo "saber-hacer" es construido, el cual debe organizarse para que quede asegurado un funcionamiento regular en la institución

El *tercer postulado* de la TAD se refiere a *la ecología de las tareas y las técnicas,* es decir, a las condiciones y restricciones que permiten su producción y su vida en las instituciones. Se postula que para que pueda existir una *técnica* en una determinada institución debe ser comprensible, legible y justificable. Se trata de una restricción institucional mínima para permitir el control y garantizar la eficacia en las tareas realizadas. Esta restricción ecológica implica la existencia de un discurso descriptivo, justificativo y explicativo de las *tareas* y *técnicas* que llamaremos *tecnología* de la *técnica*. El postulado mencionado supone que a su vez, toda *tecnología* tiene necesidad de una justificación que llamaremos *teoría* de la *técnica* y que constituye el último fundamento de la actividad.

La distinción *técnica/tecnología/teoría* es funcional y debe estar referida al tipo de *tareas* que se toman como punto de referencia. Por ejemplo, la determinación del signo del discriminante de una ecuación de segundo grado puede ser un elemento de una técnica de resolución de estas ecuaciones, pero también puede tratarse de un componente tecnológico que trata de explicar y justificar un tipo de técnicas más elementales basadas en la escritura y la factorización de una diferencia de cuadrados. Recíprocamente, lo que nos puede parecer en una cierta institución y en un momento dado como la justificación de una técnica, puede ser considerado, en otra parte o en otro momento como una tarea en ella misma, (la *tarea* que consiste en justificar una *técnica*), que supone el uso de otra *técnica* particular y la elaboración de un entorno *tecnológico-teórico* adecuado.

Un conjunto de *técnicas*, *tecnologías,* y *teorías* organizadas alrededor de un tipo de *tareas* forman una *organización praxeológica* o *praxeología puntual.* La agrupación de diversas praxeologías puntuales creará una *praxeología local,* o *regional* o incluso *global,* según los elementos que se agrupen en dicha praxeología. Generalmente, una organización puntual estará formada explícitamente por *técnicas,* mientras que en la local y regional es imprescindible explicitar los elementos tecnológicos y teóricos así como sus funciones en la práctica matemática. Por ejemplo, si consideramos la enseñanza de la proporcionalidad:

- Una *organización puntual* puede darse alrededor de la resolución de un tipo de problemas de proporcionalidad directa.
- Una *organización local* puede girar alrededor de la resolución de diferentes tipos de problemas de proporcionalidad. Es decir, de un tema de la proporcionalidad. Requiere la explicitación de un discurso *tecnológico* común que es el que da identidad a la *organización local.*
- Una *organización regional* se situaría alrededor, por ejemplo, de la noción de función numérica, que corresponde a todo un bloque de

las matemáticas enseñadas en Secundaria. Viene caracterizada por una *teoría* común.

La noción de *saber* puede ser releída en estos nuevos términos: un saber te transporta a una *organización praxeológica* particular, dotada de cierta capacidad generativa, que le permite funcionar como aparato de producción de conocimientos, es decir, de nuevas praxeologías. Esta visión amplía el punto de vista usual que tiende a ver sólo como un *saber* a la pareja *tecnología/teoría* de la organización completa, lo que permite reconstruir el conjunto de *técnicas* de la praxeología, es decir, del "saber-hacer" correspondiente. Sin embargo, recordaremos que genéticamente, son las *necesidades prácticas,* es decir, las necesidades de *técnicas,* y la consiguiente génesis y desarrollo de las mismas, lo que está en el origen de las praxeologías.

Es pues en estos términos como la Teoría Antropológica de lo Didáctico responde a la cuestión de la modelización de las prácticas sociales, de sus componentes, de su evolución y de sus logros. En el caso de las matemáticas, consideradas como una actividad humana estructurada en organizaciones praxeológicas, podremos decir que éstas nacen de la problematización de ciertos *tipos de tareas,* de momento miradas *como tipos de problemas,* de los cuales el estudio da lugar a la construcción *de organizaciones praxeológicas puntuales,* es decir, relativas a un único tipo de tareas. La articulación de algunas de estas praxeologías alrededor de una *tecnología* común permite formar *organizaciones locales,* que a su vez, se articulan en organizaciones más amplias hasta constituir *organizaciones regionales* y, en definitiva, lo que llamaremos globalmente "el saber matemático". La *descripción* de estas organizaciones y el estudio de su *ecología institucional* son el núcleo del programa de estudio de la didáctica de las matemáticas, tal como ésta se entiende desde la TAD.

De esta forma, la actividad matemática da lugar a obras matemáticas que se materializan en *organizaciones matemáticas* cuyas componentes son las *tareas* y las *técnicas,* en lo que se refiere a la parte práctica (*praxis*); y las *tecnologías* y *teorías,* en lo que se refiere al discurso sobre dicha práctica (*logos*). No hay *praxis* sin *logos,* pero tampoco hay *logos* sin *praxis*. Al unir éstas dos caras de la actividad matemática se obtiene la noción de *praxeología matemática.*

4.2. De las organizaciones matemáticas a las organizaciones didácticas

La cuestión que permite completar la problemática didáctica en el enfoque antropológico es la siguiente:

> *¿Cuáles son los medios de los que dispone tanto el matemático investigador, como el alumno de matemáticas, el profesor de matemáticas y el que utiliza los conocimientos matemáticos para construir, aprender o usar una determinada organización matemática que responda a determinadas cuestiones matemáticas?*

Paralelamente al modelo de las matemáticas institucionalizadas que hemos esquematizado, la TAD proporciona, un modelo de *actividad matemática* institucionalizada que es el medio mediante el cual una persona *entra* en una obra u organización matemática.

El modelo incluye la noción de *proceso de estudio de una obra en el seno de una institución.* Los estudiantes de la institución no tienen porqué ser sólo alumnos, en el sentido tradicional del término, sino que pueden ser todos aquellos sujetos que se plantean cuestiones matemáticas en su trabajo. En particular son estudiantes los matemáticos investigadores y los profesores que estudian matemáticas en el marco de su actividad docente. "En este sentido la noción *de proceso de estudio* contiene ampliamente la noción clásica de *proceso de enseñanza-aprendizaje:* mientras que la *enseñanza* es sólo un medio para el *estudio*, el *aprendizaje* es el efecto conseguido por el *estudio*" (Gascón 1998, p. 23-24).

El *proceso de estudio* no es homogéneo; Chevallard (1999, p. 249-250) constata que cualquiera que sea el camino de estudio, ciertos *tipos de situaciones* están necesariamente presentes. A estos tipos de situaciones les llamaremos *momentos de estudio o momentos didácticos* porque se puede decir que sea cual sea el camino seguido, se llega forzosamente a un *momento* donde un "gesto del estudio" deberá producirse. Los momentos hacen referencia principalmente a los distintos aspectos o *dimensiones* de la actividad matemática más que a una secuencia cronológica.

Cada momento del *proceso de estudio* se relaciona con cada uno de los diferentes componentes de una obra matemática y con las relaciones que se establecen entre ellos. Se distinguen seis tipos de momentos

(Chevallard, Bosch y Gascón 1997, pp. 261-276; Gascón 1998, pp. 24-26; Chevallard 1999, p. 249-254):

1 — El *momento del primer encuentro* hace referencia a los objetos matemáticos que constituyen el tipo de problemas de partida. La función principal de este momento es la de "hacer existir" dichos objetos para los estudiantes, provocando un campo de problemas, en principio muy mal delimitado. El alumno se encuentra por primera vez con un nuevo tipo de problemas. Por ejemplo:

> El momento del primer encuentro con los problemas de máximos y mínimos tiene lugar, en la organización matemática escolar a nivel de Secundaria, en las aplicaciones de la noción de derivada de una función real de variable real. En este caso los problemas de máximos y mínimos existen para los alumnos de Secundaria únicamente dentro del «estrecho» mundo de las funciones de una variable. (Gascón 1998, p. 24)

¿Cuáles son las formas posibles del primer encuentro?. Chevallard (1999, p. 250-251) señala dos grandes formas, cuyas múltiples combinaciones agotarían todo lo posible:

— Por una parte, el primer encuentro puede inscribirse en una problemática *cultural-mimética*. Bien porque los objetos ya existen en la cultura, o bien el encuentro nos conduce a buscar y explicitar las razones de ser de los objetos, es decir, los motivos por los que los objetos que han sido construidos persisten en la cultura.

— En el lado opuesto, se puede querer descartar toda referencia a una realidad preexistente, en beneficio de una realidad que se desea construir. El primer encuentro aparece identificado con un sistema de situaciones fundamentales que permiten la emergencia del objeto como respuesta a una serie de cuestiones determinadas.

2 — El *momento exploratorio* relaciona un determinado tipo de problemas con la construcción de una técnica adecuada para abordarlos. El alumno intentará construir una técnica para poder resolver el problema que estudia. Durante este momento es frecuente encontrarse con subtipos de problemas particulares que pueden aparecer como en un primer encuentro. La primera función de este momento, como señala Gascón (1998, p. 24), es "que el estudiante utilice el *pensamiento conjetural o plausible* con prioridad al pensamiento lógico, en la búsqueda de alguna manera de enfrentarse con los problemas. La segunda función del momento exploratorio consiste en permitir que el estudiante llegue a tratar con problemas concretos del campo y a utilizar una técnica matemática para

resolverlos”. Respecto a este momento y en el caso de los problemas de máximos y mínimos, el autor precitado indica:

> En el caso de los problemas de máximos y mínimos tal como se estudian en la enseñanza secundaria, podemos decir que *el momento exploratorio está prácticamente ausente*. Ello es debido a que la única técnica que aparece en el nivel escolar es casi algorítmica […] y viene dada de antemano. No hay ningún vestigio de ninguna otra técnica (en particular no aparece ni puede aparecer la *técnica de la línea de nivel tangente a la trayectoria* ni otras técnicas clásicas independientes del cálculo diferencial) y los aspectos menos algorítmicos de la técnica que se utiliza (esto es, la *modelización del problema* mediante una función de una variable que hay que optimizar) no son tomadas en consideración como «maneras de hacer matemáticas», esto es, como técnicas que habría que explotar, practicar y llegar a dominar. (Gascón 1998, p. 25)

3 — El *momento del trabajo de la técnica*: se refiere al dominio, puesta a punto, evolución y nueva creación de técnicas matemáticas. Por lo tanto, conduce a dominar y mejorar las técnicas matemáticas para poder adaptarlas a nuevos tipos de problemas. Entre sus características esenciales, Chevallard, Bosch y Gascón (1997, p. 289) mencionan que, “el momento del trabajo de la técnica resulta *creador de nuevos objetos matemáticos.* […], completa el estudio exploratorio e integra de manera natural el momento exploratorio y el momento tecnológico–teórico en el proceso”. Además entre sus funciones principales Gascón (1998, p. 25) señala: “éstas apuntan a que el estudiante llegue a tener un *dominio robusto* de las técnicas previamente exploradas, pueda llegar a *explicitar la técnica* que está utilizando, lleve a cabo *pequeñas variaciones* de la misma, *relacione diversas técnicas* y, en última instancia, pueda llegar a *producir nuevas técnicas”*. Siguiendo con el ejemplo descrito por este autor:

> En el caso particular del estudio de los problemas de máximos y mínimos tal como éste se lleva a cabo en la enseñanza secundaria, tampoco se pretende que el alumno llegue a tener un dominio robusto de la técnica escolar habitual ni, mucho menos, que llegue a producir técnicas nuevas.
> Sería posible imaginar, sin embargo, una organización matemática en la cual tuviese cabida la *técnica de la línea de nivel tangente a la trayectoria* y en la cual existiera un dispositivo didáctico que posibilitara que los estudiantes alcanzasen un dominio robusto de la misma. En ese «mundo posible» sería previsible que el desarrollo de la técnica «la línea de nivel» permitiese producir una nueva técnica, *la técnica de la «variación parcial»* que tampoco requiere del cálculo diferencial pero que permite abordar problemas de un campo mucho más amplio (Ibid., p. 25).

4 — El *momento tecnológico-teórico* pone su énfasis en los dos niveles de justificación de la práctica matemática. La aparición de *nuevas técnicas* requiere que éstas deban aparecer como correctas, justificables e interpretables en la institución de referencia. Es decir, debe existir, por una parte, un momento de justificación de las

técnicas obtenidas, la *tecnología* de la técnica. Y por otra, un discurso que justifique e interprete la tecnología; este discurso hace el papel de la *teoría*.

En el caso particular del estudio de los problemas de máximos y mínimos tal como éste se lleva a cabo en la enseñanza secundaria, la técnica, dada de antemano, se identifica con la tecnología, con el bloque de saber correspondiente. Esta tecnología, fundada en las aplicaciones de la noción de derivada de una función real de variable real en un punto, permite producir y justificar técnicas relativas a este tipo de tareas de optimización. El momento tecnológico-teórico en la institución escolar, no se vive como una necesidad posterior a la obtención de una técnica. Por razones de economía didáctica se sitúa este momento en la primera etapa del estudio, es decir, antes de la aplicación de la técnica, desapareciendo, de esta forma, todas sus funciones en el proceso de estudio.

5 — El *momento de la institucionalización* concierne a la organización matemática en su conjunto y en toda su complejidad. Se trata de precisar qué técnica se utiliza, qué elementos forman parte del entorno tecnológico-teórico y cuáles no, a qué subtipos de problemas puede aplicarse la técnica y a cuales no, etc. Aparece estrechamente ligado al momento tecnológico-teórico. En efecto, si el matemático no quiere perderse en su trabajo, o un grupo de matemáticos o de alumnos "no quiere perderse entre todo lo que está haciendo, entonces, con cierta regularidad, tendrá que institucionalizar el producto de su trabajo: precisar qué técnicas utiliza, qué elementos forman parte del entorno tecnológico-teórico –y cuáles no– , a qué subtipos de problemas se puede aplicar la técnica y a cuáles no, etc. Si no, su propia actividad se volvería ilegible para él mismo" (Chevallard, Bosch y Gascón 1997, p. 267).

6 — El *momento de la evaluación*, que se articula estrechamente con el de la institucionalización, se presenta cada vez que ponemos a prueba las *relaciones personales* con la relación institucional. La evaluación abarca todo el dominio de la construcción obtenida, sus razones de ser, su campo de aplicación, su relación con otras organizaciones matemáticas, su coherencia interna, etc. La evaluación de una organización matemática es importante para el estudiante, pero también lo es para la propia vida de la organización ya que su existencia depende de la oportunidad que se le dé para seguir viva; si no somos capaces de hacerla vivir, morirá para siempre.

De este modo postulamos que las nociones de *organización matemática* y *proceso de estudio* (que se desarrollan en el seno de una *organización didáctica)* aparecen inseparables. Además, no podemos "hacer matemáticas", en el sentido de usar y reconstruir organizaciones matemáticas sin entran en un proceso de estudio. Pero tampoco podemos construir una organización matemática si no es a través de un proceso de estudio de ciertas organizaciones matemáticas culturalmente preexistentes. En los diálogos de Chevallard, Bosch y Gascón (1997), la profesora y el estudiante hacen la siguiente reflexión:

> En general, cuando el matemático quiere construir una praxeología matemática, es porque quiere resolver cierto tipo de problemas. Y aquí también se dice, en el lenguaje corriente, que el matemático *estudia* los problemas que se plantea. […]. Pues entonces, si estudia problemas también diremos que la técnica que utiliza para estudiar problemas es una técnica didáctica. Y la praxeología que le permite actuar será, por lo mismo, una praxeología didáctica. […]. Resulta que para elaborar una praxeología matemática, el matemático necesita una praxeología didáctica. (Ibid. 1997, p. 254)

Podemos concluir, en resumen, que "lo matemático" y "lo didáctico" son dos caras de una misma moneda. Todos sabemos que la construcción de una obra matemática es el principal objetivo del trabajo del matemático. En el lenguaje corriente podríamos decir que el principal objetivo del matemático es el producto que obtiene cuando quiere resolver cierto tipo de cuestiones. Ahora bien, para conseguir su producto, para hacer su construcción, el medio del que dispone el matemático es el estudio de sus problemas. Es decir, no se puede "hacer matemáticas" sin realizar un "proceso de estudio" en el sentido anteriormente indicado. Es a esta relación a lo que nos referimos cuando decimos que lo "matemático" —en el sentido de construcción de una obra u organización matemática— es inseparable de lo "didáctico" —en el sentido de "relativo al estudio"— (Chevallard, Bosch y Gascón 1997, p. 254) Es decir, aparecen inseparables las organizaciones matemáticas y las organizaciones didácticas, siendo, de este modo, *las organizaciones didácticas el medio para entrar en las organizaciones matemáticas.*

El *contrato didáctico* (Brousseau 1986) es una noción clave de la organización didáctica para gestionar el proceso de estudio. Viene determinado por un sistema de obligaciones recíprocas entre el profesor y los alumnos referentes al conocimiento matemático que está en juego. Aunque no se trata de un verdadero contrato por varias razones, entre las que Chevallard, Bosch y Gascón (1997, p. 219-220) destacan las siguientes:

(i) No puede hacerse completamente explícito porque se refiere al resultado de la enseñanza de un conocimiento.

(ii) Si se establece sobre reglas de comportamiento del profesor y el alumno, entonces su respeto escrupuloso condenaría la relación didáctica al fracaso. De hecho el contrato pone a profesor y alumno ante una paradoja: si aceptan que, como indica una cláusula del contrato, el profesor "enseñe" los resultados al alumno, entonces éste no puede establecerlos por sí mismo y, por tanto, no aprende matemáticas.

(iii) Tanto el profesor como el alumno aceptan implícitamente en el contrato responsabilidades sobre acciones que no están en condiciones de controlar. […]. Por ejemplo, el profesor acepta la responsabilidad de proporcionar al alumno los medios efectivos que le aseguren la adquisición de un conocimiento, mientras que el alumno acepta la responsabilidad de resolver problemas de los que no se le ha enseñado la solución.

Por *organización didáctica* se entenderá, en principio, el conjunto de los tipos de tareas didácticas, de técnicas didácticas, de tecnologías didácticas y de teorías didácticas movilizadas para diseñar y gestionar el proceso de estudio de una organización matemática en una institución concreta. Podemos considerar que las organizaciones o *praxeologías didácticas* aparecen como respuesta a cuestiones del tipo "¿cómo estudiar una determinada cuestión?". Chevallard (1999, p. 244 y 245) precisa: ¿qué tipos de tareas constituyen una praxeología didáctica; o de otra manera, qué "gestos" pueden ser mirados como didácticos?

Si nos centramos ahora en un tipo particular de proceso de estudio, el que se produce en una institución didáctica y en el que el profesor hace el papel de "director del estudio", aparece el *problema del currículum* en sentido amplio. Desde el punto de vista de la TAD se produce una nueva reformulación del problema del currículum: "el problema de la elaboración del currículum, que tradicionalmente había sido considerado como un problema esencialmente psicológico, tiene un componente matemático esencial. No se trata únicamente de un problema de secuenciar y temporalizar los contenidos del currículum, sino de realizar un trabajo matemático de reorganización de los elementos técnicos, tecnológicos y teóricos que componen cada obra en base a las cuestiones a las que esta responde. Se trata, en definitiva, de una verdadera reconstrucción creativa de las obras que forman el currículum" (Chevallard, Bosch y Gascón 1997, p. 127).

De esta forma, para describir una organización matemática presente en un currículum escolar, y empezar así a abordar el problema del currículum, debemos plantearnos preguntas del tipo (Chevallard, Bosch y Gascón 1997, p. 126):

¿Cuáles son las tareas problemáticas en las que se debe basar el estudio?
¿Qué tipos de problemas matemáticos aparecerán?
¿Qué técnicas son inicialmente útiles para abordar estas cuestiones?

¿Cómo evolucionan dichas técnicas a lo largo del proceso de estudio?
¿Qué elementos tecnológicos se utilizarán para interpretar y justificar esta actividad?
¿En qué teoría se fundamentará el trabajo realizado?

En la reconstrucción escolar de una *organización matemática*, la naturaleza del tipo de cuestiones elegidas a las que la *obra matemática* da respuesta permitirá su reconstrucción bajo determinadas condiciones. Estas condiciones deben ser compatibles con el contrato didáctico institucional ya que, de no ser así, se producirán fuertes restricciones que interferirán en el proceso de estudio de la obra construida.

4.3. ¿Cómo describir el "problema del álgebra escolar" en términos de organizaciones matemáticas y didácticas?

Utilizando estas nociones podemos generalizar el problema del *análisis de la estructura, el funcionamiento y la ecología de la relación institucional a lo algebraico* que se planteaba en **EA5** y formular uno de los *prototipos de los problemas de investigación didáctica* que se construyen en la TAD:

TAD. *Analizar los componentes* (*y las relaciones dinámicas entre ellos*) *de las* praxeologías matemáticas *que son propuestas para ser estudiadas en la escuela y de las que son efectivamente construidas en el aula. Analizar la estructura y la dinámica de las* praxeologías didácticas *del profesor y de los alumnos. Describir la ecología, o condiciones de existencia institucional, de dichas praxeologías.*

En el caso del *álgebra escolar*, la TAD toma en consideración la estructura de las *organizaciones matemáticas* y *didácticas* para analizar la *organización matemática escolar* alrededor de los objetos matemáticos que en la cultura escolar se consideran como objetos "algebraicos" y describir las *condiciones de existencia institucional de dichas organizaciones*. Estos nuevos instrumentos teóricos han permitido profundizar en el dominio de investigación didáctica en torno al *álgebra elemental* que, como hemos dicho, fue construido en la década de los ochenta por los primeros desarrollos del enfoque antropológico.

Enunciaremos a continuación algunos de estos nuevos *problemas de investigación didáctica,* cuya respuesta constituye una parte importante de nuestro trabajo:

TAD1. *El "álgebra escolar", esto es, lo que se considera "algebraico" en la actual OM escolar, ¿es una organización matemática en sí misma o un instrumento de estudio de otras organización matemáticas?*

TAD2. *Utilizando la estructura de las praxeologías matemáticas, ¿cómo se pueden caracterizar las modelizaciones algebraicas en el conjunto de modelizaciones matemáticas?*

TAD3. *¿Qué relación hay entre las modelizaciones algebraicas y el grado de algebrización de las organizaciones matemáticas?*

TAD4. *¿Cómo se transforman las organizaciones matemático-didácticas a lo largo del proceso algebrización?*

TAD5. *¿Cuál es el grado de algebrización de las praxeologías matemáticas "empíricas" que se estudian actualmente en la Enseñanza Secundaria?*

TAD6. *¿Por qué, en la institución escolar de Secundaria, se tiende a identificar el "álgebra" con una obra que prolonga y generaliza unilateralmente la "aritmética escolar"? ¿Por qué la introducción al álgebra escolar siempre está ligada a la aritmética? ¿Cómo se relaciona este fenómeno, que podríamos denominar "aritmetización del álgebra escolar" con el fenómeno, aparentemente inverso, de la "algebrización de la aritmética escolar moderna"?*

TAD7. *¿Es posible algebrizar una praxeología matemática concreta en el Segundo Ciclo de la Enseñanza Secundaria Obligatoria (14-16 años), aunque ésta aparezca efectivamente como una obra prealgebraica en la actual organización matemática escolar?*

TAD8. *¿Qué características específicas, en términos de los momentos del estudio y de los dispositivos didácticos, debería tener el proceso de estudio en el caso en que la organización matemática a estudiar estuviese plenamente algebrizada? ¿Cuáles son las restricciones que dificultan la existencia de este tipo de procesos de estudio en la actual Enseñanza Secundaria?*

TAD9. *¿Cómo podemos describir y analizar la actividad didáctica escolar del profesor como director del proceso de estudio del álgebra escolar? ¿Cuál es la* "tecnología didáctica" *dominante en la Enseñanza Secundaria respecto del álgebra escolar? ¿Cómo afecta dicha tecnología –esto es, el discurso interpretativo y justificativo de las técnicas didácticas que se utilizan en la enseñanza del álgebra– sobre el proceso de estudio?*

TAD 10. *¿Qué cambios se producen en el contrato didáctico institucional en el paso de la Enseñanza Secundaria a la Enseñanza Universitaria de las matemáticas? ¿Cómo se reflejan estos cambios en las correspondientes organizaciones matemático-didácticas y, en particular, en los correspondientes procesos de algebrización?*

A medida que avancemos en la solución de los diez problemas enunciados anteriormente, estaremos en mejores condiciones para explicar la génesis, las relaciones mutuas y las consecuencias de dos fenómenos, aparentemente contradictorios entre sí: Por una parte, el de la *progresiva aritmetización del álgebra escolar*, que alcanza, al menos, toda la Enseñanza Secundaria Obligatoria (12-16 años) y, por otra, el de la *algebrización abrupta de las organizaciones matemáticas*, que puede observarse especialmente en el paso de la Enseñanza Secundaria a la Enseñanza Universitaria.

Estos dos fenómenos ocupan actualmente una posición central en el análisis de la ecología institucional de las organizaciones matemático-didácticas en torno al *álgebra escolar* y es importante subrayar que, aunque inicialmente estos dos fenómenos puedan describirse como *fenómenos matemáticos*, ya que, en primera instancia, hacen referencia a cambios en la naturaleza y las relaciones entre los componentes de las *organizaciones matemáticas*, ambos modifican profundamente la naturaleza de los *procesos de estudio* posibles de determinadas organizaciones matemáticas en el seno de una institución. Por tanto, inciden sobre las *organizaciones didácticas* y deben ser considerados como verdaderos *fenómenos matemático-didácticos*.

5. RESUMEN

En este capítulo hemos presentado brevemente algunos elementos del Programa Epistemológico de Investigación en didáctica de las matemáticas en el que se sitúa nuestro trabajo. Hemos mostrado que, en coherencia con uno de los postulados básicos de este Programa, para abordar el problema didáctico del *álgebra escolar* es preciso elaborar un modelo epistemológico de la misma y que dicho modelo, considerado como un instrumento de análisis didáctico, no tiene porqué aceptar acríticamente la forma de interpretar el álgebra en las instituciones escolares.

Para describir las aportaciones del Programa Epistemológico al problema didáctico del *álgebra escolar* hemos partido, como no podía ser de otra forma, de la Teoría de las Situaciones Didácticas para enlazar con las primeras aportaciones del enfoque antropológico, que se corresponden con los trabajos de Chevallard a lo largo de la década de los años 80 del siglo pasado. Se trata del primer ejemplo de estudio (macro)-ecológico de las condiciones de posibilidad de un tipo dado de fenómenos didácticos en un entorno cultural y social determinado.

El capítulo finaliza con la presentación muy breve de los últimos desarrollos de la TAD y con la reformulación del problema didáctico del *álgebra escolar* en este nuevo marco. Queda así planteado el problema, que hemos concretado en diez cuestiones, en los términos que pretendemos abordarlo en lo que sigue.

CAPÍTULO III

¿QUÉ ES EL *ÁLGEBRA ESCOLAR*?

Situándonos nuestro estudio en el marco teórico de la Teoría Antropológica de lo Didáctico (TAD), la primera cuestión que nos plantearemos respecto al *álgebra escolar* será preguntarnos precisamente qué es el *álgebra escolar* o, mejor, cómo podemos interpretar el *álgebra escolar* con nuestras herramientas teóricas.

Para ello debemos conocer previamente lo que la institución escolar entiende por *"álgebra escolar"*, es decir, lo que hemos denominado: "El modelo epistemológico dominante en la institución escolar". Este modelo formará parte de la tecnología didáctica dominante, es decir, permitirá describir y explicar la práctica docente del profesor de matemáticas en el aula.

En primer lugar, es importante recordar que la matemática escolar presenta unas características propias que la diferencian en muchos aspectos de las obras matemáticas de las que proviene a través de un complejo proceso de Transposición Didáctica. Estas características específicas de las organizaciones matemáticas en el seno de las instituciones didácticas, surgen del hecho de que dichas organizaciones matemáticas han tenido que ser reconstruidas o recreadas para poder ser enseñadas y han llegado así a constituir lo que denominamos la *"organización matemática escolar"*. Estas peculiaridades proceden de las condiciones y restricciones impuestas en los diferentes *niveles de determinación didáctica* que, como hemos señalado en el capítulo anterior, van desde la "sociedad" hasta las "cuestiones matemáticas concretas" a enseñar en el aula, pasando por el nivel "escolar", el nivel "pedagógico", el nivel de la propia "disciplina" (en nuestro caso las matemáticas), el del "área" de la disciplina, el "sector" dentro del área y finalmente el "tema" al que pertenecen las "cuestiones" a enseñar.

Sociedad → Escuela → Pedagogía → Disciplina → Sector → Área → Tema → Cuestión

En cada una de estas ocho etapas o niveles de determinación se imponen restricciones y condiciones que acabarán *determinando* lo que es posible hacer (y lo que no puede hacerse) en el estudio de una cuestión establecida, es decir, para crear y transmitir una praxeología que sea la respuesta esperada a la cuestión planteada.

Por ejemplo, en la actividad matemática escolar, por razones de economía didáctica global, en la exposición de los contenidos de enseñanza, los alumnos muy raramente tienen que enfrentarse con las cuestiones iniciales que dieron lugar a los tipos de problemas que se estudian en la institución escolar. Es decir, la resconstrucción escolar de las obras matemáticas *evita el origen de los problemas* y se limita a presentar problemas perfectamente enunciados sin mostrar la problemática inicial que se desea estudiar, ocultando la verdadera *razón de ser*, el sentido, de la obra matemática. De esta forma, se difunden los conocimientos escolares no "motivados", como si fuesen pertinentes por sí mismos, independientemente de las cuestiones problemáticas que les dan "sentido", simplemente porque la institución escolar así lo decide, y de los que demasiadas veces ignoramos lo que permiten conocer. En particular, es casi imposible hacer aparecer las matemáticas como algo que nace de lo no-matemático, como algo que resulta de la matematización de realidades prematemáticas (Chevallard, 2001). Este fenómeno ha sido descrito con la noción de *enfermedad didáctica*, que "consiste en reducirlo todo al aprender y al enseñar, olvidando que los conocimientos sirven para *actuar*" (Chevallard, Bosch y Gascón 1997, p.26).

Otra característica propia de las organizaciones matemáticas escolares es la tendencia a clasificar los problemas atendiendo a su temática, independientemente del desarrollo de las técnicas matemáticas que los resuelven y de sus interconexiones, originando, de esta forma, cierta atomización y aislamiento de los campos de problemas que se estudian y produciendo organizaciones matemáticas que hemos llamado *puntuales* y que suelen presentarse con ciertas rigideces (Fonseca y Gascón, 2000).

Sin entrar ahora en detalles, podemos apuntar que parte de estas características proceden de las dificultades que aparecen cuando se intentan reconstruir completamente las organizaciones matemáticas partiendo únicamente de los elementos tecnológico-teóricos que las componen (Chevallard, Bosch y Gascón, 1997, pp. 119-126). El euclideanismo como modelo epistemológico "propone que todo conocimiento matemático puede deducirse de un conjunto finito de proposiciones trivialmente verdaderas (*axiomas*) que constan de términos perfectamente conocidos (*términos primitivos*). La verdad fluye entonces desde los axiomas hasta los teoremas por los canales deductivos de transmisión de verdad (*pruebas*)" (Gascón, 2001). El *estilo docente* que de se deriva del euclideanismo pone el acento en los aspectos justificativos de la actividad matemática y este reduccionismo acaba trivializándola.

Para la didáctica de las matemáticas, no es suficiente con describir y caracterizar el modelo del *álgebra escolar* dominante en la institución docente. Es necesario, además, tomarlo como objeto de estudio, como un hecho empírico a explicar y, para ello, es necesario elaborar previamente un modelo del *"álgebra"* propio de la didáctica y utilizarlo como *modelo epistemológico de referencia* para reformular la noción de *"estudiar álgebra"* en una institución dada y para construir los fenómenos didácticos relativos a lo que denominaremos *"proceso de algebrización"*, fenómenos que evidentemente no aparecen de forma espontánea.

1. UN MODELO DOMINANTE: EL *ÁLGEBRA ESCOLAR* COMO *ARITMÉTICA GENERALIZADA*

Una de las primeras dificultades que encontramos para describir el modelo epistemológico del *álgebra escolar* dominante en las instituciones escolares consiste en que éste no aparece de forma explícita en los documentos oficiales, sino que, en la cultura escolar, puede, incluso, existir una gran diferencia entre lo que el profesor "dice que hay que hacer en el aula", la propuesta que podemos llamar *discursiva,* y lo que realmente "se hace en el aula", la propuesta *efectiva*, a propósito del *álgebra escolar* (Brousseau, 1981). Es decir, el modelo que muestra explícitamente la propia institución no sirve para dar cuenta de lo que se hace efectivamente en ella.

1.1. El paso de la aritmética al álgebra

Según Gascón (1993), el modelo implícito dominante en la enseñanza Secundaria identifica el *álgebra elemental* con una especie de *aritmética generalizada*. Antes de detallar lo que entendemos exactamente por *aritmética generalizada*, digamos que esta forma de interpretar el *álgebra escolar* cumple dos tipos de determinaciones o restricciones: la primera es una exigencia interna de la institución escolar en el *nivel pedagógico*, por la que "para que un tema pueda ser enseñado y sea didácticamente viable, es necesario que pueda aparecer en el seno de un sub-dominio suficientemente vasto" (Chevallard, 1986, p. 20). La segunda es una restricción que proviene de una determinada interpretación de la génesis histórica del álgebra, pues "son muchos los autores que consideran que el álgebra representó, en un primer momento, la formalización de la aritmética y posteriormente la formalización de la geometría" (Puig Adam 1956, p. 8).

Tanto en el ámbito de la investigación como en el de la cultura escolar, el término de *aritmética generalizada* es utilizado por muchos autores con significados diferentes. En primer lugar precisaremos qué entendemos por *aritmética generalizada* en nuestra perspectiva teórica. Este modelo, según Gascón (1993), identifica el *álgebra escolar* con el "simbolismo algebraico" frente a un supuesto "lenguaje aritmético", de forma que dicho "simbolismo algebraico" —lenguaje algebraico— se supone que lo amplía y generaliza.

En esta interpretación del *álgebra escolar* como *aritmética generalizada*, las características principales del *conjunto de prácticas* o actividades que se identifican como "algebraicas" van a ser, por un lado, una prolongación y generalización unilateral de las prácticas aritméticas, pero por otro, una contraposición o confrontación con una parte de ellas.

Entre las actividades consideradas como prolongación de la aritmética podemos mencionar, entre otras, las prácticas que proceden de:

- Generalizar parte de sus técnicas de resolución.
- Identificar el álgebra con el lenguaje algebraico y a su vez, el lenguaje algebraico como generalización del lenguaje aritmético.

Definir nociones de álgebra a partir de la aritmética (ecuación, variable, etc.).

Las actividades que diferencian *lo aritmético* de *lo algebraico* (entendido como generalización del lenguaje aritmético), que indican cierta contraposición entre *lo aritmético* y *lo algebraico* se reflejan en otras prácticas matemáticas. Por ejemplo, Gascón (1993) señala entre otras las siguientes:

(i) La resolución de problemas:

La resolución de problemas “por aritmética” conlleva la resolución sucesiva de una cadena finita de problemas simples, en los que cada resultado numérico es calculable e interpretable en términos del enunciado y formulado mediante una expresión sencilla del lenguaje natural. Por contra, los “problemas algebraicos” no responden a este tipo de esquema, no admiten una descomposición de este tipo, cada etapa intermedia consiste en la producción de una igualdad, de una relación algebraica, que representa un “enunciado matemático”, y que es obtenida por una transformación, o por una operación legítima entre una o varias igualdades, o por la aplicación de un teorema.

(ii) Los resultados obtenidos:

El resultado de una *práctica aritmética* normalmente es una medida concreta, es decir, un número acompañado de una unidad, mientras que el de una *práctica algebraica* puede ser una relación entre dos magnitudes, lo que se opone a las expectativas de los alumnos, ya que para ellos una respuesta bien formada debe ser forzosamente un número.

(iii) Los objetos con los que se trabaja:

Mientras que en *aritmética* se trabaja con “números concretos”, en *álgebra* se manipulan símbolos, que deben ser interpretados de diversas formas en función del contexto en el que aparezcan:

— incógnitas en las ecuaciones y sistemas
— números generalizados en las identidades
— variables o parámetros en las fórmulas y funciones…

(iv) Significado de los signos y de los símbolos:

En la *actividad aritmética* se usan “signos” o “símbolos” que tienen referentes muy concretos y un sentido muy preciso.

> Mientras que en la *actividad algebraica* el significado de los signos está modificado de manera esencial. Por ejemplo en el contexto aritmético los signos +, =, –, x, etc., indican acciones, mientras que en el “lenguaje algebraico”, esto es, en la *aritmética generalizada*, también pueden indicar relaciones, es decir, poseen cierta *dualidad* que complica su utilización y su interpretación.

Cuando un Programa de Investigación asume este modelo de *álgebra elemental* para explicar los fenómenos didácticos y, en particular, para dar cuenta de las dificultades que tienen los alumnos, no puede evitar quedar encerrado en el *marco aritmético de referencia* (Filloy, 1989).

Entre los fenómenos que no pueden explicarse si se asume el modelo del *álgebra elemental* como *aritmética generalizada* podemos citar en primer lugar el fenómeno de la *“aritmetización del álgebra”*, que muestra que no sólo la aritmética enseñada no ha sido absorbida por el álgebra enseñada, sino que la aritmética ha subsistido como saber enseñado gracias a que ha tomado prestados instrumentos de trabajo típicamente algebraicos. Chevallard (1989) ha mostrado que el álgebra enseñada no es propiamente hablando una aritmética generalizada, dado que no contiene estrictamente a la aritmética enseñada. Por una parte, la resolución algebraica de ciertos problemas aritméticos supone el uso de unos instrumentos que no forman parte del álgebra tal y como ahora es enseñada. Y por otra parte, el *álgebra enseñada* tiene una temática propia que no es una generalización de la aritmética. En resumen, podemos afirmar que el *álgebra enseñada* ni contiene estrictamente a la aritmética enseñada ni tampoco consiste en una generalización de la misma

La interpretación del origen histórico del álgebra que concuerda con esta manera de interpretar el *álgebra* como aritmética generalizada es la que sitúa el origen del *álgebra* en la Escuela de Alejandría (-300), haciéndola coincidir con la introducción de valores indeterminados representados por letras en lugar de números. Esta interpretación no permite, sin embargo, explicar algunos *fenómenos históricos* importantes, como por ejemplo, las dificultades encontradas por los griegos en la solución de problemas geométricos, dificultades que sólo pueden explicarse por la ausencia de instrumentos que les permitieran formular los citados problemas geométricos en términos de operaciones.

Por otra parte, el desarrollo de la llamada *“álgebra geométrica”* y la complejidad que supuso el uso del método geométrico en la justificación de relaciones numéricas pone de manifiesto la ausencia, en aquel momento, de un dispositivo *algebraico*. La interpretación que hace Vitrac (1990) de los estudios llevados a cabo sobre este tema pone de manifiesto que:

> […] l'algèbre moderne est l'étude des structures et de leurs propriétés, *structures* qui concernent aussi bien des ensembles d'objets que des relations entre ces ensembles d'objets. Il va de soi que ceci est le produit d'un développement récent, étranger aux mathématiques anciennes, tout autant que l'usage d'un symbolisme développé. Mais l'algèbre n'est certainement pas, et en tout cas n'a pas été que cela: elle s'est d'abord développé autour de l'étude des équations et de leur résolution, en particulier quand des relations, soit entre grandeurs géométriques, soit entre nombres, ont éte prises comme objets d'étude pour elles-mêmes.
> De ce fait elles permirent un dépassement de la coupure qui avait été plus o moins marquée entre les deux domaines principaux des mathématiques anciennes: l'arithmétique et la géométrie. Elles fournirent au moins un nouvel "outil" au même titre que la logique; on peut même considérer qu'elles constituent un domaine "en amont" de ces deux spécialités et leur octroyer une priorité logique sur celles-ci (Vitrac, 1990 p. 367).

Esta forma de interpretar el álgebra antigua sirve de base a Vitrac para plantear el problema que ha venido a denominarse del "álgebra geométrica" y que tiene relación con la "interpretación algebraica" del Libro II de los Elementos de Euclides. Esta problemática tiene su origen en los trabajos de P. Tannery (1882) (citado en Vitrac 1990) y ha sido completada por H. G. Zeuthen que ha introducido el término "*álgebra geométrica*" para caracterizar el Libro II. La tesis del "álgebra geométrica", aceptada entre otros historiadores por T. Heath, consiste esencialmente en afirmar que determinadas propiedades enunciadas en el Libro II han estado motivadas por el intento de los matemáticos griegos de *justificar geométricamente los procedimientos utilizados en los cálculos*. Según la reformulación que propone Vitrac el problema del "álgebra geométrica" consiste en saber si en los escritos matemáticos griegos puede apreciarse una "thématisation de ces relations "universelles", ou du moins une ébauche de ce qui semble bien avoir été une contribution majeure des mathématiciens des pays d'Islam" (Ibid., p. 367).

Desde nuestra perspectiva didáctica la formulación de Vitrac es todavía excesivamente ambigua. Postulamos que la respuesta a la cuestión del "álgebra geométrica" deberá sustentarse, forzosamente, en un modelo epistemológico del álgebra mucho más elaborado que el modelo implícito que considera al álgebra como un simple "instrumento de justificación" y también más complejo que el que considera el álgebra como el "estudio de ciertas relaciones universales (en sí mismas), independientemente de la naturaleza de los objetos relacionados". En nuestro trabajo no pretendemos resolver la cuestión del "álgebra geométrica", aunque pensamos que el modelo epistemológico del álgebra que vamos a elaborar, puede ser útil a los historiadores de la matemáticas para abordar dicha cuestión. Mostraremos que determinados modelos matemáticos que son considerados "geométricos" (tanto en las instituciones escolares como por parte de los historiadores de las matemáticas) tienen, o pueden tener, un nivel de "algebrización" nada despreciable.

Consideramos, en definitiva, que el problema del "álgebra geométrica" podría ganar en precisión si se enunciase en los siguientes términos:

> "¿Cuál es el grado o nivel de algebrización de la geometría euclidea y, en particular, del Libro II de los Elementos de Euclides?"

Para dar cuenta de todos estos fenómenos, conviene postular, como observa Jacob Klein (1934), que Viète creó una "nueva disciplina", el "arte analítico", con un nivel de generalización desconocido por los antiguos. Dos hechos independientes convergen en la génesis de esta "nueva álgebra":

- El análisis geométrico de Papus (320) y
- Los métodos aritméticos de Diofanto (250),

lo que hace que la nueva álgebra de Viète (1540-1603) pueda ser considerada a la vez como un desarrollo de los métodos aritméticos y de los geométricos.

Finalmente, queremos volver a señalar que sólo se pueden explicar las limitaciones del marco aritmético en el estudio de los fenómenos didácticos, si disponemos de un modelo alternativo de *álgebra elemental* que permita formular fenómenos nuevos y reformular los antiguos según una perspectiva más amplia.

1.2. Características del *álgebra escolar* como *aritmética generalizada*

Para describir de forma precisa las principales características de la interpretación del *álgebra escolar* con el modelo de la *aritmética generalizada* debemos tener en cuenta cuatro ámbitos o aspectos de las actividades relacionadas con el *álgebra escolar*, con lo *algebraico*:

(a) La construcción o emergencia del álgebra, es decir, las razones de ser del álgebra escolar.

(b) Los conocimientos previos en los que se basa la construcción, es decir, los objetos sobre los que se construye el álgebra escolar.
(c) Los elementos más significativos de las actividades asociadas al álgebra escolar.
(d) Las dificultades más destacadas en la realización de las actividades "algebraicas".

De cada uno de estos aspectos formularemos los principales indicadores mediante la abreviatura **AG** *(aritmética generalizada)* y un subíndice, que servirá de referencia para el estudio exploratorio que posteriormente presentaremos.

(a) La construcción o emergencia del álgebra.

AG1: El *álgebra escolar* se construye en un contexto numérico, a modo de generalización de los cálculos con números y de traducción de expresiones numérico-verbales.

AG2: Las expresiones algebraicas nacen de la necesidad de representar y manipular números desconocidos.

AG3: El *álgebra escolar* se presenta muy vinculada a la aritmética y bastante aislada del resto de las organizaciones matemáticas presentes en el currículum de secundaria.

(b) Los conocimientos previos en los que se basa la construcción del álgebra escolar.

AG4: Un conocimiento previo esencial para introducir el *álgebra* lo constituyen las propiedades aritméticas básicas y el domino del lenguaje aritmético.

AG5: Otro conocimiento previo necesario son las habilidades del cálculo aritmético escrito y mental.

AG6: Para poder pasar de las técnicas aritméticas a las técnicas algebraicas, el dominio del cálculo aritmético no debe limitarse a la ejecución de las técnicas, sino que debe abarcar también la capacidad de describirlas y "objetivarlas".

(c) Los elementos más significativos de las actividades asociadas al álgebra escolar.

AG7: En la escritura y manipulación de expresiones algebraicas, es muy importante distinguir entre los datos conocidos y las incógnitas.

AG8: Una ecuación es una igualdad entre expresiones algebraicas que se cumple para algunos valores concretos de las incógnitas.

AG9: Las tareas más importantes en *álgebra escolar* son:
— la traducción del lenguaje natural al lenguaje algebraico
— el cálculo algebraico
— la resolución de ecuaciones.

AG10: En la resolución de problemas verbales mediante ecuaciones, éstas se construyen como traducción del texto del enunciado, con la ayuda eventual de esquemas figurativos.

(d) Las dificultades más destacadas en la realización de las actividades "algebraicas".

AG11: Una de las principales dificultades del *álgebra escolar* radica en la manipulación de expresiones algebraicas con incógnitas, debido a que es difícil atribuirles un significado preciso.

AG12: Otra de las principales dificultades del *álgebra escolar* radica en la necesidad de asignar a los símbolos que representan las operaciones (+, -, ∗, /) un significado diferente (y no siempre único) del que tenían en el lenguaje aritmético.

AG13: Las dificultades conceptuales y manipulativas del *álgebra escolar* son superiores a las que aparecen en la aritmética y en la geometría, principalmente por su nivel de abstracción.

2. EMERGENCIA DE UN MODELO ALTERNATIVO

2.1. El modelo Análisis-Síntesis reformulado

El modelo Análisis-Síntesis reformulado ha sido propuesto en un trabajo de J. Gascón (1993) publicado bajo el título "*Desarrollo del conocimiento matemático y análisis didáctico: Del patrón del análisis-síntesis a la génesis del lenguaje algebraico*" que representa una reconstrucción racional, en el sentido de Lakatos, de la génesis del álgebra elemental que podría, a su vez, dar lugar a una posible reconstrucción del *álgebra escolar*, a partir de los problemas verbales y de la modelización matemática. En este trabajo se parte de la noción de *obstáculo epistemológico*, considerado como "[…] origen de una *bifurcación* en el desarrollo de las matemáticas y es éste desarrollo múltiple (bifurcado) el que puede ser explicitado" en términos de desarrollo de nuevas técnicas y nuevos tipos de problemas (Ibid., p. 305). Es decir, Gascón asigna a la noción de obstáculo epistemológico un papel dinámico en el desarrollo y evolución de las matemáticas. Propone tomar el análisis de la *bifurcación* producida como instrumento para comprender la naturaleza de dicho conocimiento (Ibid., p. 306).

En primer lugar recordamos que el *análisis-síntesis clásico* es el que utilizaban los griegos para resolver problemas de construcción geométrica, según constata nuestro autor (Gascón 1993, pp. 310-311) citando la versión tradicional de Pappus:

> El llamado Tesoro del Análisis es, para decirlo brevemente, un cuerpo especial de doctrina habilitado para uso de aquellos que, tras haber terminado los Elementos ordinarios, están deseosos de adquirir la facultad de resolver problemas que se les puedan plantear y que implican (la construcción de) líneas; dicho cuerpo de doctrina es útil sólo para esto. Constituye la obra de tres hombres, Euclides, el autor de los Elementos; Apolonio de Perga y Aristeo el viejo y procede por vía de análisis y síntesis.
>
> El análisis, pues, considera aquello que se busca como si fuera algo aceptado y pasa desde ello, a través de sus consecuencias sucesivas, a algo que pueda ser aceptado como punto de partida para una síntesis: pues en el análisis damos por supuesto aquello que se busca como si (ya) estuviera dado, e inquirimos qué es aquello de lo cual resulta esto y a su vez cuál es la causa antecedente de lo posterior, y así sucesivamente, hasta que volviendo así sobre nuestros pasos, lleguemos a algo ya conocido o que pertenece a la clase de los primeros principios, y a un tal método lo llamaremos análisis por ser una solución hacia atrás.
>
> Pero en la síntesis, invirtiendo el proceso, tomamos como ya dado aquello a lo que llegamos en último término en el análisis y, alineando en su orden natural como consecuencias lo que antes eran antecedentes, y conectándolas unas con otras sucesivamente, llegamos finalmente a la construcción de lo que se buscaba; y a esto llamamos síntesis.
>
> Ahora bien, el análisis es de dos tipos, uno va dirigido a la búsqueda de la verdad y se llama teórico, el otro se dirige a encontrar aquello que se nos ha dicho que encontremos y se llama problemático.
>
> (1) En el tipo teórico de análisis, asumimos aquello que es propuesto como si fuera algo verdadero, tras lo cual pasamos a través de sus consecuencias sucesivas, como si también ellas fueran verdaderas y estuvieran establecidas en virtud de nuestra hipótesis, a algo conocido: entonces (a), si ese algo conocido es verdadero, aquello que es propuesto será también verdadero y la prueba se obtendrá en el orden inverso al análisis, pero (b), si llegamos a algo reconocidamente falso, aquello que es propuesto será también falso.
>
> (2) En el tipo problemático asumimos que lo que se busca es existente y obtenible, tras lo cual derivamos sucesivamente otras incógnitas, considerándolas obtenibles, hasta llegar a algo conocido: luego si (a), lo que es conocido es posible y obtenible, es decir, lo que los matemáticos llaman dado, lo que se buscaba originariamente será también posible y la prueba se obtendrá de nuevo en orden inverso al análisis, pero si (b) llegamos a algo reconocidamente imposible, el problema será también imposible.

El desarrollo, o la evolución, de este patrón clásico de análisis-síntesis, a partir de ahora **A-S**, puede hacerse en dos direcciones que el autor ha denominado "*crítica*" o "*reformulada*". La primera dirección proviene del *análisis teórico*, en el sentido de búsqueda de la verdad de las afirmaciones y permite mejorar y corregir las conjeturas. Es decir, establece que la lógica del descubrimiento matemático no sólo tiene un carácter deductivo, sino que es inseparable de la lógica de la justificación y ésta no sólo sirve para *probar*, sino que sirve también para *descubrir* nuevas conjeturas. Esta dirección de desarrollo da origen al Patrón *Crítico* que desemboca en un Programa de Investigación.

La segunda dirección proviene del *análisis problemático*, de la búsqueda del objeto-incógnita y supone que la condición global del problema está expresada simbólicamente, "entendiendo que suponer el problema resuelto equivale a haber obtenido dicha expresión. En la práctica, partir se esta suposición equivale a partir de una cantidad expresable de dos maneras diferentes y, por medio del análisis, llegar hasta las expresiones simbólicas elementales sin hacer ninguna distinción entre las que representan cantidades conocidas o desconocidas." (Gascón 1993, p. 318). Esta dirección de desarrollo da origen al Patrón ***A-S*** *reformulado* que desemboca en la Modelización Algebraica.

La situación presentada por este autor en la que fracasa el ***A-S*** *clásico* y es necesario un nuevo instrumento, que denomina ***A-S*** *reformulado*, es la siguiente:

> *Un grupo de 18 amigos cenan juntos y, a la hora de pagar la cuenta, resulta que algunos de ellos no tienen dinero por lo que cada uno de los restantes debe pagar 300 pesetas más de lo que le correspondía. Sabiendo que la cuenta ascendía a un total de 27000 pesetas, ¿cuántos amigos no pagan porque no tienen dinero?* (Ibid, p. 315)

Mediante el ***A-S*** *clásico*, procederíamos, en primer lugar, con el *análisis* de los estados —E_i— y transformaciones —T_i— pertinentes, que puede esquematizarse del modo siguiente:

E_4: Número de amigos que no pagan
Transformación (T_4): Restar este número a 18
E_3: Número de amigos que pagan
Transformación (T_3): Dividir 27000 por el número de amigos que pagan
E_2: Cantidad pagada por cada uno de los que pagan
Transformación (T_2): Restar 300 al número anterior
E_1: Cantidad que debería de pagar cada uno de los 18 amigos

Transformación (T_1): Multiplicar por 18

E_0: Importe de la cuenta (DATO)

En segundo lugar procederíamos al trabajo de *síntesis*, que puede esquematizarse de la siguiente forma:

E_0: 27000

T_1^{-1}: $\frac{27000}{18} = 1500$ = 1500 pts. que debe pagar cada uno ➔ E_1

T_2^{-2}: 1500 + 300 = 1800 pts. que pagan los que tienen dinero ➔ E_2

T_3^{-3}: $\frac{27000}{1800} = 15$ = 15 personas que tienen dinero ➔ E_3

T_4^{-4}: 18 – 15 = 3 personas que no pagan ➔ E_4

Como podemos observar en cada transformación se produce una cadena de problemas aritméticos simples en la que cada resultado es interpretable en términos del enunciado.

La misma situación pero con otros datos, muestra las limitaciones de este procedimiento de resolución, es decir, el procedimiento ***A-S** clásico* fracasa:

> *Un grupo de amigos cenan juntos y, a la hora de pagar la cuenta, resulta que 3 de ellos no tienen dinero por lo que cada uno de los restantes debe pagar 300 pesetas más de lo que le correspondía. Sabiendo que la cuenta ascendía a un total de 27000 pesetas, calcular el número total de amigos que han cenado* (Ibid, p. 316)

En este caso los estados sucesivos del *análisis* son aparentemente iguales a los del problema anterior:

E_4: Número de amigos que cenan = x (INCÓGNITA)

Transformación (T_4): Restar 3 al número anterior

E_3: Número de amigos que pagan = $x - 3$

Transformación (T_3): Dividir 27000 por el número de amigos que pagan

E_2: Cantidad pagada por cada uno de los que pagan = $\dfrac{27000}{x-3}$

Transformación (T_2): Restar 300

E_1: Cantidad que debería de pagar cada uno = $\dfrac{27000}{x-3}$ – 300

Transformación (T_1): Multiplicar por en número total de amigos

E_0: Importe de la cuenta = 27000 = $\left(\dfrac{27000}{x-3} \pm 300\right)x$ (DATO)

La diferencia esencial es que en cada estadio del *análisis* no obtenemos una cantidad interpretable en términos del enunciado, sino "*una relación entre cantidades*".

La *síntesis* correspondiente a este proceso de *análisis* puede esquematizarse:

E_0: $27000 = \left(\dfrac{27000}{x-3} \pm 300\right)x$

T_1^{-1}: $\dfrac{27000}{x} = \dfrac{27000}{x-3} - 300 \longrightarrow E_1$

T_2^{-1}: $\dfrac{27000}{x} + 300 = \dfrac{27000}{x-3} \longrightarrow E_2$

T_3^{-1}: $\dfrac{27000}{\dfrac{27000}{x}+300} = x-3 \longrightarrow E_3$

T_4^{-1}: : $\dfrac{27000}{\dfrac{27000}{x}+300} + 3 = x \longrightarrow E_4$

La *síntesis* se ha transformado en una cadena de relaciones equivalentes, y en cada una de las cuales se trata de la expresión de una misma cantidad de dos maneras diferentes. Este cambio de perspectiva, como apunta Gascón (1993, p. 317) está recogido en las reglas XVII y XIX de Descartes.

En este nuevo patrón, “suponer el problema resuelto” equivale a suponer que la *condición del problema* está expresada simbólicamente y se conoce dicha expresión simbólica. El lenguaje algebraico tiene pues un aspecto funcional, es decir, enfatizamos su potencialidad como instrumento para resolver problemas o mejor dicho, para fundamentar métodos de resolución de clases de problemas, frente a la consideración del lenguaje algebraico como una mera generalización y traducción del lenguaje aritmético en el que sólo se tiende a enfatizar su aspecto formal.

De esta forma, el desarrollo de la *“nueva técnica”* puede ser considerado como un *nuevo arte analítico*, “generado en el *desarrollo* del tipo *problemático* de patrón análisis-síntesis (en el que no aparece ningún presunto lenguaje aritmético), y cuyo lenguaje no puede desgajarse del método analítico del que forma parte” (Gascón 1993, p. 321).

Si interpretamos ahora la resolución de problemas como parte de un estudio más amplio de sistemas matemáticos o extramatemáticos y la intención del estudio es la producción de conocimientos relativos al sistema, entonces el uso del lenguaje algebraico se enmarca dentro de una actividad más amplia que llamaremos *modelización algebraica* y que seguidamente detallaremos.

Este modelo de *álgebra elemental* permite reinterpretar algunos fenómenos didácticos relativos a la enseñanza del *álgebra elemental* que tienen su origen en obstáculos de carácter epistemológico, es decir, en el cambio de naturaleza de la actividad matemática que se produce. Señalamos tres aspectos fundamentales:

1. En el patrón clásico los objetos se transforman en otros objetos de la misma naturaleza mediante operaciones matemáticas. En el nuevo modelo se trabaja con relaciones entre objetos y las transformaciones convierten relaciones en otras relaciones. “Este primer cambio de los objetos de la actividad matemática proporciona elementos para interpretar toda una serie de fenómenos relacionados con la naturaleza y significado de las letras y los símbolos” (Gascón 1993, p. 324).

2. La emergencia de una nueva técnica y su relación con la actividad de modelización matemática, en particular con la modelización algebraica.

3. La ampliación del campo de problemas. La actividad matemática va más allá, se trata “no sólo de la obtención del objeto incógnita

> […] sino también de la obtención de una relación concreta que determine dicho objeto incógnita, para llegar a estudiar las condiciones de existencia y la forma general en que dicho objeto (así como otros objetos distintos de los que nos proponíamos obtener) quedan determinados” (Ibid. p. 326).

Otros fenómenos didácticos, considerados y tratados como errores y dificultades de los alumnos en el Programa Cognitivo, pueden ser analizados en términos de *obstáculos didácticos*, entre ellos destacamos:

- Uso inadecuado de propiedades aritméticas
- Errores en aritmética
- Utilización de métodos primitivos o informales
- Incorrecta comprensión de la notación y las convenciones

2.2. La modelización algebraica

La *modelización algebraica* representa la culminación del uso del instrumento algebraico. Y el instrumento algebraico, por su parte, representa una nueva técnica en la resolución de problemas, que a su vez, puede interpretarse como modelo algebraico de otras técnicas.

Siguiendo las aportaciones de Chevallard (1989) y Gascón (1994_b), la modelización matemática —y en particular la modelización algebraica— se desarrolla teniendo en cuenta los siguientes estadios:

(i) Un primer estadio, el de la *PROBLEMÁTICA INICIAL*, que a su vez se compone de dos subestadios:

a) El *sistema* a modelizar, es decir, la situación problemática extramatemática o intramatemática (organización matemática) a estudiar.

b) Las *cuestiones generales*, en un primer momento ingenuas, que surgen acerca del sistema y que no tienen respuesta inmediata.

(ii) El segundo estadio, la *CONSTRUCCIÓN DEL MODELO MATEMÁTICO*, que incluye dos aspectos importantes:

c) La *definición del sistema*, es decir, la identificación y designación de las variables que se consideran pertinentes y lo caracterizan.

d) El *establecimiento de relaciones* entre las variables.

En la modelización algebraica, las técnicas utilizadas para la construcción del modelo pueden organizarse en tres niveles de complejidad creciente:

(1) Expresar en lenguaje algebraico una cantidad dada.

(2) Designar verbalmente una cantidad compuesta por ciertas cantidades que aparecen en el sistema y expresarla en lenguaje algebraico.

(3) Designar y expresar algebraicamente una misma cantidad de dos maneras distintas.

(iii) El tercer estadio, *TRABAJO DEL MODELO*, en el que se desarrollan dos subestadios:

e) El *trabajo manipulativo* que sería el trabajo del modelo propiamente dicho y cuyo objetivo es obtener un *modelo final* que muestre las propiedades del sistema modelizado.

f) La *interpretación del trabajo* y de los resultados obtenidos dentro del sistema modelizado.

En la modelización algebraica, el trabajo manipulativo puede organizarse, según las técnicas utilizadas, en al menos cuatro tipos de actividades:

(1) Identificar los componentes de una expresión.

(2) Identificar la estructura de una expresión.

(3) Aplicar manipulaciones formales para obtener expresiones equivalentes con un objetivo dado.

(4) Aplicar manipulaciones formales para expresar una cantidad en función de otras.

En la modelización algebraica el trabajo del modelo se suele identificar con un trabajo de fabricación de una serie de modelos matemáticos que van alejándose del sistema inicial.

(iv) Finalmente, un último estadio, en el que se pueden *ENUNCIAR PROBLEMAS NUEVOS* cuya resolución aumentará nuestro conocimiento del sistema estudiado. Se trata de problemas cuya formulación no hubiese sido posible sin disponer del modelo algebraico del sistema y del trabajo realizado con su ayuda.

Esquemáticamente podríamos representarlo de la forma siguiente:

(i)	PROBLEMÁTICA INICIAL: a) y b)
(ii)	CONSTRUCCIÓN DEL MODELO: c) y d)
(iii)	TRABAJO DEL MODELO: e) y f)
(iv)	PROBLEMAS NUEVOS

A continuación, siguiendo el esquema propuesto, describimos los elementos de un ejemplo de actividad de modelización algebraica que puede situarse en el "*sistema comercial*", aparentemente extramatemático —descuentos, beneficios, impuestos, etc.—, o en una "obra matemática" prealgabraica —%, incrementos, aumentos, disminuciones, etc.

(i) PROBLEMÁTICA INICIAL

a) Origen del sistema a modelizar

El sistema a modelizar puede ser tanto un sistema extramatemático como matemático, en nuestro ejemplo pueden darse ambas interpretaciones:

En la interpretación *extra-matemática* los conceptos y nociones que intervienen son: Comercio IVA Descuentos Beneficios Precio Bruto Precio Neto Precio de Coste	En la interpretación *intramatemática* el sistema a modelizar es una OM prealgebraica, cuyos componentes son: Tipos de problemas: cálculo de porcentajes Técnicas: “aritméticas” Tecnologías: Reglas

b) Cuestiones generales que se presentan

A un producto tenemos que aplicarle un descuento y el IVA, esto podemos hacerlo en el orden que nos interese, nuestras cuestiones generales pueden ser del tipo:

— ¿Qué es mejor primero aplicar el IVA y luego el descuento o al revés?

— ¿Qué es preferible desde el punto de vista del vendedor?

— ¿Qué es preferible desde el punto de vista del comprador?

— ¿Qué es más interesante desde el punto de vista fiscal?

— ¿De qué depende?: IVA > Descuento
Descuento > IVA
Precio del objeto

(ii) CONSTRUCCIÓN DEL MODELO

Comenzamos por la definición del sistema que consiste, como ya hemos indicado, en identificar y designar las variables pertinentes así como las relaciones entre ellas.

c) Definición del sistema

Identificar y designar las variables pertinentes, en nuestro caso:

IVA: I % ; $\frac{I}{100} = i$

Precio bruto: X

Descuento: D% ; $\frac{D}{100} = d$

Impuesto: I

Precio después de aplicar el IVA a X: P_1

Precio después de aplicar el descuento a X: P_2

Precio de coste: C

Beneficio: B

Precio después de aplicar el descuento a P_1: P_3 (IVA y DESCUENTO)

Precio después de aplicar el IVA a P_2: P_4 (DESCUENTO e IVA)

d) Relaciones entre las variables

Las relaciones entre las variables podemos expresarlas:

$I = X \cdot i$ $\quad$ $D = X \cdot d$

$P_1 = X + X \cdot i$ $\quad$ $P_2 = X — X \cdot d$

$P_3 = P_2$ si $X = P_1$ $\quad$ $P_3 = P_1 — P_1 \cdot d$

$P_4 = P_1$ si $X = P_2$ $\quad$ $P_4 = P_2 + P_2 \cdot i$

(iii) TRABAJO DEL MODELO

Comenzamos por un trabajo manipulativo que nos permitirá hacer interpretaciones en nuestro sistema inicial y responder a algunas de las cuestiones planteadas inicialmente:

e) Trabajo manipulativo

Se trata de manipulaciones formales que nos permitirán obtener de una serie de modelos que nos permitirán responder a las cuestiones planteadas

$P_3 = (X + X \cdot i) — (X + X \cdot i) \cdot d$ $\quad$ $P_4 = (X — X \cdot d) + (X — X \cdot d) \cdot i$

$P_3 = (X + X \cdot i)(1 — d)$ $\quad$ $P_4 = (X — X \cdot d)(1 + i)$

$P_3 = X(1 + i)(1 — d)$ $\quad$ $P_4 = X(1 — d)(1 + i)$

Por lo tanto, $\boxed{P_3 = P_4}$

f) Interpretación del trabajo dentro del sistema

De la relación obtenida en el trabajo manipulativo obtenemos las respuestas a las cuestiones planteadas, por ejemplo:

¿Qué es más beneficioso desde el punto de vista del comprador?

- Desde el punto de vista del comprador es igual de beneficioso aplicar el descuento y luego añadir el IVA que al revés, es decir, añadir en primer lugar el IVA y después aplicar el descuento.

¿Qué se paga en la declaración del IVA?

Para la situación P_3: $I_3 = X \cdot i$

Para la situación P_4: $I_4 = X \cdot (1 - d) \cdot i$

Por lo tanto, $I_3 > I_4$

- Desde el punto de vista del vendedor le interesa aplicar primero el descuento para pagar menos impuestos.

(iv) ENUNCIAR PROBLEMAS NUEVOS

Esta modelización del sistema inicial facilita el poder formular nuevas preguntas interesantes, que no estaban previstas en las cuestiones iniciales. Por ejemplo:

1. Si volver a etiquetar los artículos supone un gasto de E € (etiquetas, mano de obra, etc.) *¿Cuánto tienen que aumentar las ventas para que salga beneficioso el descuento?*
2. *¿Qué relación debe haber entre el descuento y el impuesto para que se compensen y el precio neto sea igual al precio bruto?*
3. Si el impuesto y el descuento son iguales, *¿qué relación hay entre el precio neto y el precio bruto?*
4. *¿Qué hacer para que el precio neto sea doble que el precio bruto? ¿Qué relación debe darse entre el IVA y el descuento?*

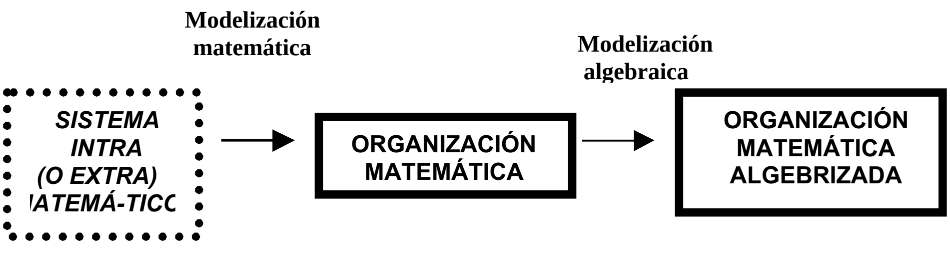
3. EL *ÁLGEBRA ESCOLAR* COMO *INSTRUMENTO DE MODELIZACIÓN*

3.1. Caracterización de las modelizaciones algebraicas

Señalemos, de entrada, que no disponemos de un criterio de demarcación que permita trazar una frontera precisa y nítida entre una organización matemática *algebrizada* y una organización *prealgebraica* (en el sentido de “todavía no algebrizada”). Postulamos que la algebrización de una organización matemática es siempre una cuestión de grado e intentaremos caracterizar este proceso con ayuda de la noción de *modelización*. Ensayaremos, por tanto, la siguiente definición provisional:

Definición (1): Diremos que *una organización matemática está algebrizada* en la medida en que pueda ser considerada como un *modelo algebraico* de otra organización matemática que juega el papel de *sistema a modelizar*.

En la actividad matemática habitual se trata siempre de estudiar un *sistema*, que puede ser intramatemático —como, por ejemplo, el sistema de los números primos, o el de los %– o extramatemático –como, por ejemplo, el Sistema Solar, o el sistema comercial–. Describimos *la actividad matemática* como una *actividad de modelización* (Chevallard, 1989c) y, mediante la Definición (1), restringimos el dominio de las modelizaciones *algebraicas* al de los sistemas intramatemáticos o previamente matematizados, esto es, a sistemas que ya pueden ser considerados como *organizaciones matemáticas* y que, por tanto, están constituidas por tipos de problemas, técnicas, tecnología y teoría. Esto significa que las modelizaciones algebraicas se aplican únicamente a sistemas que, de una manera no siempre explícita, son el resultado de una modelización matemática previa.



Está claro que con la Definición (1) hemos trasladado el problema inicial de caracterizar las *organizaciones matemáticas* (más o menos) *algebrizadas*, al problema de *caracterizar las modelizaciones* (más o menos) *algebraicas* de determinadas organizaciones matemáticas. Es por esta razón que debemos dar una segunda "definición", también provisional:

Definición (2): Diremos que una modelización matemática, de una obra matemática que juega el papel de sistema, es una *modelización algebraica* en la medida en que *modeliza íntegramente todos los componentes* del sistema y, en particular, en la medida en que *modeliza materialmente las técnicas* matemáticas de dicha obra matemática.

De esta definición se desprenden dos rasgos característicos de las *modelizaciones algebraicas* que explicitamos a continuación con la notación **RMA1** y **RMA2**:

RMA1. *Modelizan explícita y materialmente las técnicas matemáticas* que forman parte de la organización matemática que juega el papel de *sistema* a modelizar. Esta condición comporta que, una vez modelizadas algebraicamente, *las técnicas pueden ser manipuladas como nuevos objetos matemáticos*, lo que posibilita y hasta provoca el rápido desarrollo de las mismas.

RMA2. *Modelizan íntegramente todos los componentes de la organización matemática* que hace el papel de sistema, en lugar de limitarse a modelizar aisladamente algunos de dichos componentes. Veremos que esta modelización global permite, en muchos casos, considerar que el *modelo algebraico*, como nueva organización matemática, *constituye una extensión de la organización-sistema* inicial.

En el artículo Bolea, Bosch y Gascón (2002) presentamos la descripción de dos modelizaciones matemáticas "sucesivas" de un mismo *sistema numérico*: El "*modelo de la forma de los números*" y el "*modelo del nombre de los números*". Con ellas hemos querido mostrar la operatividad de estos dos rasgos característicos de las modelizaciones algebraicas, tal como han sido formulados. De igual forma, hemos mostrado que la segunda de las modelizaciones consideradas, que es la que producirá el "*modelo del nombre de los números*", es relativamente *más algebraica* que la primera de las modelizaciones, que es la que da origen al "*modelo de la forma de los números*". Para describir y precisar este "más o menos" algebrizadas definimos, en el apartado siguiente, la noción de *grado de algebrización* mediante cuatro indicadores:

3.2. Indicadores del grado de algebrización de una organización matemática

Una vez descritos los rasgos característicos de una *modelización algebraica*, nos volveremos a centrar en el *modelo* que se obtiene como resultado de aplicar una tal modelización. Dado que hemos definido "*organización matemática algebrizada*" como la que resulta al llevar a cabo una *modelización algebraica*, estamos ahora en condiciones de explicitar algunos *indicadores del grado de algebrización* (**IGA**) de una organización matemática que, naturalmente, no serán más que una consecuencia de la naturaleza (más o menos) algebraica de la modelización en cuestión.

IGA1. Manipulación de la estructura global de los problemas

Una *organización matemática* nace siempre como respuesta a cuestiones que dan lugar, progresivamente, a diferentes *tipos de problemas*. Un primer indicador del grado de algebrización de una organización está relacionado con la posibilidad de tomar en cuenta, describir y hasta manipular la *estructura global* de estos problemas. Esto significa que cuanto más algebrizada está una organización matemática más clara es la tendencia a tratar con *tipos generales de problemas,* en lugar de tratar únicamente con problemas aislados. Para poder manipular la estructura global de los diferentes tipos de problemas es preciso hacer un uso sistemático del juego entre *parámetros* entendidos, de una manera muy general, como objetos matemáticos conocidos (sean números, conjuntos, funciones, espacios vectoriales, figuras, matrices, o cualquier otro objeto) que se manipulan como si fueran desconocidos, e *incógnitas,* entendidas como objetos matemáticos desconocidos, que se manipulan como si fueran conocidos.

IGA2. Tematización de las técnicas y nueva problemática a nivel tecnológico

Un segundo indicador del grado de algebrización de una organización matemática viene dado por la posibilidad de plantear y estudiar problemas relacionados con la *descripción,* la *interpretación,* la *justificación,* la *producción* y el *alcance* (o dominio de validez) de las técnicas que la integran. En particular, una organización matemática algebrizada debe permitir describir los tipos de problemas resolubles con determinadas técnicas, estudiar en qué condiciones un determinado tipo de problemas tendrá o no tendrá solución, en qué casos la solución será única, etc. En particular, debe permitir caracterizar la *estructura de las* *soluciones*. Esto significa que cuanto más algebrizada esté una organización, más fácil será plantear la cuestión de las *condiciones de existencia de solución* (de un determinado tipo de problemas) y no sólo la cuestión de la *determinación de una solución* de dicho tipo de problemas.

Resulta, por lo tanto, que cuanto más algebrizada está una organización matemática, más fácil es que *sus técnicas puedan situarse a un nivel tecnológico* (esto es, a un nivel de descripción, interpretación, justificación, relación de las técnicas) respecto a la organización inicial de la que han surgido, enriqueciendo así la tecnología de esta última.

IGA3. Unificación y reducción de los tipos de problemas, técnicas y tecnologías. Reducción de los elementos ostensivos

El tercer indicador del grado de algebrización de una organización matemática viene dado por la mayor o menor *unificación de los diferentes tipos de problemas* que forman parte de la organización, así como por la mayor o menor *integración de las técnicas* correspondientes y de los *elementos tecnológicos* asociados. Esta unificación comporta, paralelamente, una reducción drástica de los instrumentos ostensivos (Bosch, 1994) con los que se representan y manipulan los problemas, las técnicas y los componentes del discurso tecnológico-teórico (nociones, conceptos, definiciones y teoremas).

Para que este indicador sea relevante es necesario, naturalmente, que la organización matemática evaluada sea suficientemente rica, esto es, esté formada por un número suficiente de tipos de problemas y de técnicas inicialmente diferenciados. Utilizando las últimas nociones desarrolladas en la **TAD**, podríamos decir que este indicador no puede aplicarse a *organizaciones matemáticas* "*puntuales*" construidas en torno a lo que la institución considera como una única técnica y a un único tipo de tareas, sino que debe tratarse, al menos, de *organizaciones matemáticas* "*locales*" que surgen de la integración de un conjunto de tareas y técnicas que aceptan una tecnología común (Chevallard, 1999).

IGA4. Emergencia de tipos de problemas independientes del sistema modelizado

El cuarto y último indicador del grado de algebrización de una organización matemática viene dado por la posibilidad de generar *tipos de problemas cada vez más alejados del contexto del sistema* cuyo modelo es la organización que estamos analizando. Cuanto más algebrizada está una organización matemática, más posibilidades tiene de *independizarse del sistema* que modeliza

Para ejemplificar su operatividad y con objeto de explicitar la noción misma de *grado de algebrización de una organización matemática*, los hemos utilizado para comparar el grado de algebrización de las dos organizaciones formadas por los modelos sucesivos del *sistema numérico* citadas anteriormente (Bolea, Bosch y Gascón 2002). De acuerdo con nuestra definición de "organización matemática algebrizada", es de esperar que el modelo del *"nombre de los números"* sea una organización matemática relativamente *más algebrizada* que la que viene dada por el modelo de la *"forma de los números"*.

El ejemplo utilizado también pone de manifiesto que nuestros indicadores del *grado de algebrización* de una organización matemática no contraponen lo "algebraico" ni a lo "geométrico", ni, tampoco, a lo "aritmético". Una organización considerada tradicionalmente como "geométrica" porque estudia "figuras geométricas" como, por ejemplo, la que se describe en el Libro II de los Elementos de Euclides– puede estar más o menos *algebrizada*, dependiendo de la *forma de llevar a cabo dicho estudio*. Lo mismo sucede con las organizaciones matemáticas consideradas tradicionalmente como "aritméticas" porque estudian las propiedades de los números enteros. *El grado de algebrización de una organización matemática es independiente de la naturaleza de los objetos* (sean éstos "números", "figuras geométricas" u otros cualesquiera) *que la constituyen*; depende únicamente de la naturaleza de la actividad matemática que es posible llevar a cabo dentro de dicha organización matemática. Son precisamente los rasgos característicos de esta actividad matemática los que pretendemos medir con la presencia de los indicadores **IGA1** a **IGA4**.

3.3. Características del *álgebra escolar* considerada como instrumento de *modelización algebraica*

Como hemos indicado en el punto 1.2. de este capítulo, a propósito de las características de la interpretación del *álgebra escolar* como aritmética generalizada (**AG**), destacamos cuatro aspectos o ámbitos esenciales en la caracterización del modelo alternativo, que hemos denominado instrumento algebraico o instrumento de *modelización algebraica*, para el que usaremos la abreviatura **MA**.

(a) La construcción o emergencia del álgebra escolar, esto es, sus razones de ser.

MA1: El *álgebra escolar* es un instrumento para resolver problemas acerca de sistemas conocidos matemáticos o extramatemáticos: aritméticos, geométricos, físicos, comerciales, de la vida cotidiana, etc.

MA2. El proceso de modelización algebraica es una herramienta potente para describir, generalizar y justificar procedimientos y propiedades de los sistemas estudiados (papel tecnológico del álgebra).

MA3: El instrumento algebraico permite plantear y resolver problemas de diferentes ámbitos matemáticos (aritméticos, geométricos, combinatorios, comerciales, etc.) que son muy difíciles de plantear y de resolver sin álgebra.

MA4: El *álgebra escolar* permite unificar tipos de problemas que aparecen aislados en cada bloque temático de la organización matemática escolar, e incluso entre diferentes bloques.

(b) Los conocimientos previos en los que se basa la construcción del álgebra escolar.

MA5: Algunas de las mejores situaciones para introducir el *álgebra escolar* son los "problemas inversos", esto es, problemas en los que se invierten los datos e incógnitas y que, por ello, no pueden resolverse mediante técnicas directas aritméticas o geométricas. Un conocimiento previo importante es, por lo tanto, el dominio de estas técnicas directas.

MA6: Dado que el *álgebra escolar* surge inicialmente como herramienta de modelización de sistemas matemáticos o extramatemáticos, es necesario conocer mínimamente el sistema que se quiere modelizar y, en particular, las limitaciones del trabajo dentro de este sistema.

MA7: Dado que la modelización algebraica destaca la existencia de diferentes tipos de magnitudes en un mismo sistema, así como las relaciones entre ellas, es necesario cierta familiaridad con estas magnitudes, familiaridad que no debe reducirse al simple cálculo aritmético (magnitudes equivalentes, magnitudes continuas y discretas, asignación de unidades, relación entre magnitudes, etc.).

(c) Los elementos más significativos de las actividades asociadas al álgebra escolar.

MA8: Una primera etapa importante del trabajo algebraico (y también una de las más difíciles) radica en la construcción de modelos de sistemas extra o intramatemáticos.

MA9: Los modelos algebraicos (ecuaciones y fórmulas) se construyen generalmente expresando de dos maneras diferentes una misma cantidad de magnitud del sistema estudiado.

MA10: La potencia del instrumento algebraico se basa en su capacidad para no diferenciar los datos conocidos de las incógnitas (juego entre parámetros y variables).

MA11: Un tipo importante de modelos algebraicos viene dado por determinadas funciones (modelos funcionales). Por ello, el *álgebra escolar* debe estar fuertemente vinculada al estudio de funciones elementales.

MA12: Una fase importante del trabajo algebraico es la manipulación del modelo en sentido estricto (ecuación o fórmula) y su posterior interpretación y justificación en términos del sistema estudiado.

MA13: La última fase del trabajo de modelización consiste en la formulación de nuevos problemas acerca del sistema estudiado, problemas que no se podían plantear antes de la construcción del modelo.

(d) Las dificultades más destacadas en la realización de las actividades "algebraicas".

MA14: Una de las principales dificultades del *álgebra escolar* está ligada a la ausencia curricular de problemas abiertos de modelización, es decir, aquellos en los que se presenta el sistema que se debe estudiar y preguntas abiertas al respecto (debiéndose por ejemplo empezar por elegir las variables que determinan el sistema estudiado, aquellas que resultan más pertinentes para la cuestión planteada, etc.).

MA15: Cuando se plantean problemas de planteo que requieren cierto trabajo de modelización (parcial e incompleto), aparecen otras dificultades ligadas al poco conocimiento de los sistemas que se quieren estudiar y a la falta de costumbre de considerarlos como sistemas problemáticos que pueden ser estudiados de nuevo.

MA16: Otra de las principales dificultades del *álgebra escolar* está ligada a la ausencia institucional de cuestionamientos tecnológicos (necesidad de justificación, de definición, etc.) en la matemática de la enseñanza obligatoria.

4. RESUMEN

En este capítulo hemos descrito y caracterizado dos modelos epistemológicos específicos del *álgebra escolar.* El primero de ellos considera el *álgebra escolar* como una especie de *aritmética generalizada* **(AG).** Este modelo tiende a identificar el *álgebra escolar* con el *"simbolismo algebraico"* (o lenguaje simbólico) que, se supone, amplía y generaliza un presunto *lenguaje aritmético.* Desde este punto de vista, las actividades que se consideran "algebraicas" constituyen una prolongación unilateral de las prácticas aritméticas y, por lo tanto, pueden caracterizarse y describirse a partir de éstas. Postulamos que éste es el modelo dominante en la Enseñanza Secundaria y que, pese a sus limitaciones explicativas, ha sido asumido acríticamente en muchas investigaciones.

A partir del *Análisis/Síntesis clásico,* considerado como técnica de resolución de problemas no sólo geométricos, hemos propuesto otro modelo epistemológico específico del *álgebra escolar*, considerándola como un instrumento de la actividad matemática y, más concretamente, como un *instrumento de modelización algebraica* **(MA)**. Desde este punto de vista, una actividad matemática será *"algebraica"* en la medida que: permita la manipulación global de a estructura de los problemas; incluya la problemática relativa a la descripción, justificación y alcance de las técnicas que se utilizan; unifique los tipos de problemas, técnicas y tecnologías; y provoque la emergencia de nuevos tipos de problemas con la consiguiente ampliación de los mismos.

En el próximo capítulo llevaremos a cabo un estudio exploratorio para, a la luz de los modelos específicos descritos, analizar la situación del *álgebra escolar* en la Enseñanza Secundaria Obligatoria.

CAPÍTULO IV

UN ESTUDIO EXPLORATORIO: SITUACIÓN ACTUAL DEL ÁLGEBRA EN LA ESO

1. EL *ÁLGEBRA ESCOLAR* SEGÚN LA *“NOOSFERA”*

Antes de la reforma de las “matemáticas modernas”, el álgebra constituía uno de los grandes sectores de la matemática enseñada en secundaria, junto con la aritmética y la geometría. Así, un *Compendio de la matemática elemental* que se presenta como un texto de “repaso” de los tres primeros cursos del bachillerato elemental del plan de 1956 (C. Marcos y J. Martínez, 1964) divide los contenidos de este nivel educativo en tres grandes sectores: “Aritmética”, “Álgebra” y “Geometría plana”, para añadir posteriormente un bloque titulado “Problemas de reválida” destinado a la preparación del examen final del bachillerato. El bloque de álgebra recoge cuatro lecciones: “Ecuaciones algebraicas” con una exposición general sobre las expresiones algebraicas y las leyes de transformación de igualdades, “Ecuaciones de primer grado”, “Ecuaciones que se reducen a las de primer grado” y “Sistemas de ecuaciones lineales”. El programa se amplía con los contenidos del 4º y último curso de bachillerato elemental incorporando las secciones “Polinomios”, “Función cuadrática y ecuaciones de segundo grado”, “Radicales”, “Estadística” y “Geometría del espacio”. (Edelvives, 1970)

Con la Ley general de educación de 1970, se amplía la educación primaria a 8 cursos (de los 6 hasta los 14 años) que pasa a denominarse Educación General Básica. Los programas renovados que corresponden al Ciclo Superior de la EGB (6º, 7º y 8º, los correspondientes al principio de bachillerato anterior) organizan los contenidos en ocho bloques (MEC, 1987, p. 135):

1.º Conjuntos numéricos
2.º Divisibilidad
3.º Geometría plana
4.º Funciones
5.º Polinomios
6.º Proporcionalidad de magnitudes
7.º Geometría del espacio
8.º Estadística descriptiva

Vemos cómo desaparece el antiguo bloque denominado "Álgebra" cuyos contenidos se incorporan ahora a los bloques de funciones y polinomios. Tampoco aparece esta denominación en los bloques correspondientes al Ciclo Medio (3º, 4º, 5º), cuyos contenidos están organizados en:

1.º Conjuntos y relaciones
2.º Conjuntos numéricos
3.º Magnitudes y medidas
4.º Topología y geometría

El término "álgebra" sólo se mantuvo en la expresión "estructuras algebraicas", ya sea para promover su incorporación a la construcción de lo numérico (primera época de la reforma de las matemáticas modernas), ya sea para, posteriormente, retrasar su introducción hasta el bachillerato. Así, por ejemplo, en las recomendaciones generales correspondientes al bloque temático "Polinomios", se advierte al profesor: "No se pretende concluir en una estructura algebraica formalizada (anillo o álgebra de polinomios) ni en un estudio sistematizado de ellos, que se hará en el Bachillerato". (*Ibid.*, p. 161)

Como veremos más adelante, la siguiente reforma educativa (LOGSE, 1990) introducirá variaciones significativas en la denominación de los bloques de contenidos, pero no incorporará la antigua denominación de "álgebra" para designar los contenidos que tradicionalmente se asignaban a este término: ecuaciones de primer y segundo grado, manipulación de expresiones algebraicas (igualdades notables, polinomios, radicales, etc.) y resolución de problemas con ecuaciones o sistemas de ecuaciones.

Esta evolución corresponde a la restricción que, en su análisis del fenómeno de transposición didáctica, Chevallard (1986_b) designa como “la restricción de compatibilidad” del saber enseñado con el saber sabio. Desde el momento que la matemática sabia reserva el término “álgebra” para la rama de este saber ligada al estudio de las estructuras inicialmente numéricas y posteriormente abstractas, el saber escolar abandona la antigua denominación y reordena los contenidos bajo epígrafes “más modernos”, como son las funciones y los polinomios. Esta restricción, que iba en cierto sentido en contra del uso funcional de la modelización algebraica, provocó un desequilibrio entre el tratamiento del *álgebra elemental* como medio o herramienta de modelización y la supervaloración del dominio de los aspectos formales del cálculo algebraico, con el argumento de que el alumno debía adquirir previamente una buena competencia en cálculo algebraico para poder usarlo de manera efectiva.

La opción seguida por la mayor parte de los currícula escolares de nuestro entorno cultural consistió en comenzar las actividades algebraicas con el aprendizaje y desarrollo del cálculo algebraico, ligado con la teoría de ecuaciones, es decir, comenzar por los aspectos formales. Para, posteriormente, en los niveles de matemáticas más avanzados, mostrar el carácter funcional del cálculo algebraico. Éste es utilizado como medio o herramienta de otros dominios de las matemáticas: funciones, análisis, geometría, etc.

Pero la problemática aportada por el tema de ecuaciones no justificaba ni daba sentido a la presencia del cálculo algebraico, ni a la importancia dada al mismo, existiendo una gran desproporción entre las tareas que el alumno debía realizar en las manipulaciones del cálculo algebraico y las tareas simples que deben hacerse en la resolución de ecuaciones. Las necesidades del cálculo algebraico eran necesidades intrínsecas al propio cálculo. Por lo tanto, al no existir dominios de intervención adaptados al tipo de tareas, el aprendizaje del cálculo algebraico se hacía en el vacío, en sí mismo, es decir, en un marco estrictamente formal.

Además, al no existir de forma explícita un marco de referencia ni una problemática inicial que sugiera una guía de conducta en las manipulaciones algebraicas, se toma un marco de referencia implícito que es el aritmético, ampliamente conocido por el alumno. Es decir, según apuntaba el profesor Chevallard (1986), el primer aprendizaje del cálculo algebraico, propio de los primeros niveles, se desarrolla en el seno de otra organización más vasta y más próxima al alumno, la aritmética, de la que toma su marco de referencia. Las reglas del cálculo algebraico representan la expresión de las propiedades de las operaciones algebraicas y su funcionamiento no es más que una extensión de su funcionamiento aritmético. Es el fenómeno que ya hemos denominado como la *aritmetización del álgebra escolar* y que, según hemos indicado, responde al modelo —dominante y más o menos explícito— del álgebra como *aritmética generalizada*.

En este apartado presentamos algunas fuentes y algunos datos empíricos que confirman la afirmación expresada en el capítulo anterior. Es decir, intentamos *constatar* mediante el análisis de algunos documentos propios de la *institución escolar* y de los actores del sistema, —profesores y alumnos— que en la institución de Secundaria Obligatoria se interpreta predominantemente el *álgebra escolar* en términos de una *aritmética generalizada*, frente a otras posibilidades como, por ejemplo, el *álgebra escolar* como instrumento de *modelización algebraica*. Usaremos la notación **AG** o **MA**, según proceda, para evidenciar la presencia de los indicadores (con los que hemos caracterizado cada una de las interpretaciones) en los documentos estudiados. Entre dichos documentos destacamos los siguientes:

- Diseño Curricular Base (DCB) de la Educación Secundaria Obligatoria (ESO).
- Introducciones y Guías didácticas de libros de texto aprobados por las autoridades educativas.
- Revistas y libros dirigidos principalmente al profesorado.

1.1. El Diseño Curricular Base

Actualmente el DCB (1989, pp. 479-549) es el documento oficial que establece los contenidos matemáticos que deben abordarse en la etapa 12-16 años, y es en el segundo ciclo de esta etapa (14-16 años) cuando se recomienda que se inicie el aprendizaje del álgebra elemental o del *álgebra escolar*. Es importante señalar que ninguno de los “bloques de contenido” en los que se divide la matemática escolar hace referencia de forma explícita al álgebra. Recordamos que dichos bloques son (DCB, 1989, p. 499):

1. Números y operaciones: significado, estrategias y simbolización.
2. Medida, estimación y cálculo de magnitudes.
3. Representación y organización del espacio.
4. Interpretación, representación y tratamiento de la información.
5. Tratamiento del azar.

Aunque las expresiones relativas al álgebra y al lenguaje algebraico hayan desaparecido de las denominaciones generales de los bloques de contenido, sí aparecen en las subdivisiones de cada bloque. Así, en el *Bloque 1, Números y operaciones: significado, estrategias y simbolización,* se detalla entre los *Hechos, conceptos y principios* (DCB,1989, p. 503) en el punto 7:

> **El lenguaje algebraico**
> Significado y uso de las letras para representar números (un número desconocido fijo, un número cualquiera, una relación entre conjuntos de números […].
> Fórmulas y ecuaciones. Reglas para desarrollar y simplificar expresiones literales sencillas.

En estas recomendaciones de emergencia o construcción del *álgebra escolar* encontramos formulaciones que corresponden a nuestros indicadores **AG1**, **AG2** y **AG3** mediante los cuales caracterizábamos en el capítulo anterior la interpretación del álgebra como aritmética generalizada.

Entre las técnicas o *procedimientos* que el alumno debe conocer, el citado documento puntualiza (p. 503 y 504):

> **Utilización de distintos lenguajes**
> 1. Interpretación y utilización de los números, las operaciones y el lenguaje algebraico en diferentes contextos, eligiendo la notación más adecuada en cada caso.
> […]
> 4. Formulación oral de problemas numéricos y algebraicos, de los términos en que se plantean y del proceso y cálculos utilizados para resolverlos, confrontándolos con otros posibles".

Entre los *algoritmos y destrezas* para llevar a cabo estos procedimientos, el documento señala entre otros:

> 14. Utilización de los algoritmos para resolver ecuaciones de primer grado y una incógnita, y de algoritmos numéricos y gráficos para resolver de manera aproximada otras ecuaciones (Ibid, p. 504).

Nos parece interesante mostrar algunas de las *orientaciones específicas* que el documento (pp. 537-5543) ofrece respecto a *los números, las operaciones y el lenguaje algebraico*, que tienen especial interés para discernir el modelo institucional de *álgebra escolar* que se desprende del documento:

> 68. La comprensión adecuada del significado de las operaciones con los números y la adquisición de determinadas destrezas de cálculo requiere que se pongan de manifiesto las propiedades elementales de estas operaciones. Pero no debe olvidarse que importa menos la explicitación de estas propiedades que su interiorización, de manera que puedan ser utilizadas de forma sistemática en el análisis de situaciones en las que intervengan los números, en el cálculo numérico mental o escrito y en el manejo de expresiones literales. En este sentido, no parece adecuado considerar las propiedades de las operaciones, en esta etapa, como un medio para dotar a los conjuntos numéricos de una estructura determinada.

Es decir, el *álgebra escolar* no debe presentarse como el estudio de estructuras abstraídas de las operaciones aritméticas, por lo tanto se niega el papel tecnológico del álgebra en el estudio del sistema aritmético, que corresponde al indicador **MA2**.

> 77. El lenguaje algebraico plantea serias dificultades para la mayoría de los alumnos, dificultades casi insalvables en algunos casos. Esta constatación obliga a introducirlo con gran cautela durante esta etapa. Se debe pretender poco más que una introducción al lenguaje simbólico, cuidando mucho que los objetos algebraicos tengan significado para el alumno. En consecuencia, es de suma importancia la realización de actividades que refuercen conceptos tales como los de variable, incógnita, solución, etc. o el significado del signo "=" en distintas situaciones familiares. (DCB, 1989, p. 542)

En esta orientación quedan reflejados algunos de nuestros indicadores del modelo **AG**, por ejemplo, el indicador **AG11**, que recoge la dificultad producida por la falta de significado; el indicador **AG12** que resalta las diferencias de significado que deben atribuirse a los símbolos, frente al refuerzo de significados en el marco aritmético.

La continuación de la orientación específica nº 77, parece entonces hacer mención de la necesidad de introducir el álgebra como modelo de situaciones aritméticas y geométricas, aunque se hable de "simbolización" y el objetivo final sea el de "acercarse al significado" de las expresiones algebraicas:

> No hay que olvidar que, en las expresiones algebraicas, las letras pueden cumplir funciones muy distintas, y que una de las principales causas del fracaso de los alumnos se debe a la poca atención que se concede a la comprensión de las mismas, mientras que se da un peso excesivo a la adquisición de automatismos. Se puede proponer la simbolización de situaciones numéricas diversas (desigualdades, ecuaciones, relaciones entre conjuntos de números, propiedades…), como forma de acercarse al significado de cada una de las partes y al conjunto de una expresión algebraica. Antes de llegar a la escritura literal es útil pasar previamente por representaciones manipulativas o gráficas de la situación, por ejemplos numéricos

concretos, con el fin de que el alumno interiorice las relaciones existentes antes de escribirlas.
Recíprocamente, la invención de problemas numéricos a propósito de expresiones algebraicas o la búsqueda de valores concretos que las verifiquen (sacar datos a partir de fórmulas…) son también buenas actividades para dar sentido a las letras.

En esta parte quedan pues recogidos los indicadores **AG7** y **AG10**

La *orientación didáctica* siguiente (nº 78) hace referencia a la resolución de ecuaciones (p. 542 y 543):

78. El aprendizaje de las reglas para resolver ecuaciones de primer grado es interesante no sólo por la frecuencia con que tales ecuaciones aparecen en muchas actividades matemáticas, sino porque supone un buen ejercicio de reflexión y refuerzo de conceptos básicos, como son el de igualdad y los de las transformaciones que la conservan. Además estas reglas tienen validez para muchos otros tipos de expresiones, por lo que merece la pena dedicarles atención.

La importancia concedida a las reglas que permiten la resolución de ecuaciones está recogida entre los elementos más significativos de las actividades asociadas al *álgebra escolar*, característica que concuerda con el indicador **AG10**.

A continuación, vamos a analizar los restantes Bloques de Contenido, principalmente los epígrafes dedicados a *Hechos conceptos y principios* y el de *Procedimientos*, tratando de encontrar alguno de los rasgos del modelo del *álgebra escolar* como instrumento de modelización algebraica **(MA)** o al menos algún aspecto funcional del *álgebra escolar* que permita el inicio de ciertas actividades algebraicas en dichos Bloques de Contenido.

En el *Bloque 2, Medida, estimación y cálculo de magnitudes*, en *Hechos conceptos y principios* encontramos (DCB, 1989, p. 507):

5. Mediciones indirectas
   - Relación entre las medidas lineales y las de área o volumen en un cuerpo.
   - Fórmulas para calcular perímetros, áreas y volúmenes de figuras y cuerpos geométricos.
   - El teorema de Pitágoras.

Las *orientaciones específicas* (83) respecto a las *medidas indirectas* (p. 544) se mantienen en este uso del álgebra en el ámbito de la geometría o de las magnitudes en general:

83. La obtención y utilización de fórmulas para la medida de áreas y volúmenes a partir de longitudes es una de las primeras ocasiones en las que los alumnos se enfrentan con símbolos y expresiones literales; debe tenerse en cuenta todo lo que se ha indicado más arriba acerca de la introducción del lenguaje algebraico y del cuidado con el que debe llevarse a cabo. En particular no conviene hacer una presentación prematura de las fórmulas de medida,

> reservándolas para los últimos años de la etapa, en los que el sentido de la medida y la estimación están suficientemente asimilados.

Aunque, según la última frase leída, el álgebra aparece más como un peligro del que protegerse que como un instrumento de trabajo. Es decir, las fórmulas impedirán "dar sentido" a las medidas y no mejorarían nuestra capacidad de resolver problemas, lo que correspondería a nuestro indicador **MA1**.

En el *Bloque 3*, *Representación y organización del espacio*, en *Hechos conceptos y principios* encontramos (DCB, 1989, p. 509):

1. Los elementos geométricos en el plano y en el espacio
    - Elementos básicos para la descripción y organización del espacio: puntos, rectas y planos.
    - Relaciones básicas para la descripción y organización del espacio: paralelismo, perpendicularidad e incidencia.
    - Sistemas de referencia en el plano y en el espacio: coordenadas.

En el apartado de *Procedimientos:* "Utilización de distintos lenguajes" no encontramos ninguna referencia al lenguaje algebraico ni al de las coordenadas. Como tampoco la encontramos en las *orientaciones específicas* de la *organización del espacio*. Parece pues que las regularidades, propiedades y relaciones que se dan en las figuras geométricas se obtienen de un tratamiento ostensivo, de la observación directa y manipulación de las figuras geométricas. O, en todo caso, que el trabajo geométrico en un plano coordenado poca relación tiene con un posible modelo algebraico del plano geométrico euclidiano

En el *Bloque 4, Interpretación, representación y tratamiento de la información* en *Hechos conceptos y principios* encontramos (DCB, 1989, p. 512-513), leemos:

1. La información sobre fenómenos causales
    - Las gráficas cartesianas como representación del cambio y la relación entre dos magnitudes.
    - Características globales de las gráficas.
    - Fenómenos y gráficos lineales, cuadráticos, exponenciales y periódicos.
    - Expresión algebraica asociada a una gráfica.

En el apartado de *Procedimientos:* "Utilización de distintos lenguajes", encontramos (p. 513):

2. Utilización de expresiones algebraicas para describir gráficas en casos sencillos.
3. Interpretación y elaboración de tablas numéricas a partir de datos o de expresiones funcionales, teniendo en cuenta el fenómeno al que se refieren.

Constatamos que el estudio de situaciones o sistemas a través del lenguaje gráfico (de la forma) es previo al uso del instrumento algebraico. Las *orientaciones específicas* así lo indican (DCB, 1989, p. 546):

> 91. Los alumnos deben familiarizarse con una amplia gama de gráficas, continuas o no, con expresión analítica sencilla o sin ella, escalonadas, de puntos, etc. La reflexión sobre la imagen visual debe permitir observar características específicas de las gráficas y diferencias significativas con otras, como la forma de crecimiento o decrecimiento, el comportamiento para valores grandes de la variable independiente, la simetría, etc. El tipo de análisis que se haga en cada caso dependerá de la simplicidad de la gráfica: desde el meramente descriptivo en unos casos, al análisis completo en relación con su ecuación que podrá hacerse en los casos más sencillos. […]

El uso del instrumento algebraico con todo su alcance, aún en casos en los que la construcción del modelo sea sencillo, aparece, pues totalmente fragmentado.

En el *bloque 5, Tratamiento del azar,* apreciamos que puede hacerse sin álgebra, a través de expresiones verbales, diagramas y tablas. Las orientaciones específicas respecto al azar dicen:

> 97. […] Todos los alumnos, antes de llegar a la Educación Secundaria, tienen ideas previas sobre el azar, la dependencia e independencia de sucesos, etc. que es preciso conocer y tener en cuenta a la hora de diseñar y proponer actividades. No se debe olvidar que éstas deben ir encaminadas, principalmente, al desarrollo y educación de la intuición sobre la probabilidad. El desarrollo de esta intuición se realiza inicialmente a través de valoraciones cualitativas sobre la posibilidad de ocurrencia de sucesos, para pasar posteriormente a un enfoque frecuencial. […] Desde luego, no parece deseable llegar a la formalización del álgebra de sucesos y menos aún el establecimiento de una axiomática de la probabilidad.

Por lo tanto, del análisis del primer documento curricular y unificador, en la institución de Secundaria Obligatoria, podemos concluir que el *álgebra escolar* no aparece ni como una organización matemática a estudiar en sí misma, tratamiento que se daba antes de la reforma educativa, ni como instrumento que se utiliza en el estudio de otras obras escolares. Aunque su introducción sea necesaria e inevitable, el DCB advierte al profesor de los inconvenientes de su uso prematuro: antes que un instrumento potente en la resolución de problemas, el álgebra, por los automatismos que crea, es un peligro para la comprensión e intuición de los alumnos.

1.2. Biblioteca del profesor

De las distintas revistas y textos dirigidos a profesores presentamos algunas aportaciones surgidas tras la reforma educativa en nuestro país.

Así, en un artículo de revista dirigida a profesores, Tomás Recio (1993, p. 16), apoyándose en palabras de Freudenthal, describe el *álgebra escolar* diciendo:

> El álgebra escolar es sinónimo de manipulación de letras. […]. Ciertamente el *cálculo literal* es uno de los aspectos característicos del álgebra escolar, al que yo añadiría, tanto por razones históricas como por la coincidencia en el tiempo de aprendizaje, la manipulación *no decimal* de ciertos números (radicales, radicales imbricados, potencias): es decir, la realización de ciertas tareas (simplificar, verificar la igualdad, etc.) con tales números sin recurrir a realizar las operaciones indicadas mediante la obtención de la expresión decimal correspondiente. Aún puede añadirse al bagaje característico del álgebra escolar la introducción al concepto de ***función***. […]. También, si continuamos con esta aproximación descriptiva al álgebra, es característica de esta parte del currículum escolar la *resolución de ecuaciones o de establecimiento de identidades por medios formales*, la formulación y resolución de problemas de modo que la dificultad se encuentra fundamentalmente en la *traducción simbólica* de la situación planteada y en la identificación de la incógnita a determinar".

En este párrafo Recio asocia el *álgebra escolar* con la manipulación de letras que representan números, que corresponde a los indicadores **AG2** y **AG3** y describe algunas de las prácticas características de la actividad que llamamos *algebraica*, tal y como las consideramos en el indicador **AG9**. Sólo en el segundo párrafo citado se refiere al álgebra como instrumento de resolución de problemas mediante la "traducción" de situaciones al lenguaje de las ecuaciones.

A diferencia de este autor el Grupo Azarquiel (1991), en su presentación de ideas y actividades para enseñar álgebra, no formula una descripción explícita de las tareas propias del *álgebra escolar*, pero son aclaratorios al respecto alguno de los títulos de los capítulos de contenidos que forman la publicación a la que nos referimos:

1.¿Hay razones para que cueste tanto aprender álgebra?
2. Generalización
3. El proceso de simbolización
4. Problemas relacionados con la simbolización. Traducción
5. Ecuaciones
6. Sistemas de ecuaciones
7. Destrezas algebraicas
8. Juegos y pasatiempos algebraicos

Observamos que los contenidos correspondientes a los capítulos 2, 3, 5 y 6 están presentes en nuestros indicadores **AG1**, **AG2** y **AG9**.

Enfedaque (1990, p. 23) en un artículo publicado en *Suma* señala igualmente que "los contenidos esenciales del *álgebra elemental* son:

– Las variables
– Las expresiones algebraicas.
– Los cálculos con expresiones algebraicas
– La resolución de ecuaciones (e inecuaciones) y sistemas de ecuaciones"

Es decir, vuelve a evidenciarse el indicador **AG9**.

De igual modo, Kaput (1996) considera cinco aspectos esenciales del álgebra que pueden dar sentido al término *álgebra elemental* y que deberían tenerse en cuenta en la enseñanza obligatoria. Dichos aspectos son:

1. El álgebra como generalización y formalización de regularidades y condiciones, el álgebra, especialmente, pero no exclusivamente como razonamiento aritmético generalizado y como razonamiento cuantitativo generalizado (corresponde al indicador **AG1**).

2. El álgebra como manipulación guiada por la sintaxis de formalismos (corresponde al indicador **AG2**).

3. El álgebra como el estudio de las estructuras abstraídas de las relaciones y los cálculos (corresponde al indicador **AG3**).

4. El álgebra como el estudio de las funciones, relaciones y variaciones mutuas (corresponde al indicador **MA1**).

5. El álgebra como un conjunto de lenguajes de creación de modelos y lenguajes de control de fenómenos (corresponde al indicador **MA2**).

No obstante, este autor matiza que estos aspectos, y no otros, surgen del doble discurso que desde la cultura escolar se hace sobre las matemáticas, tanto como objeto de saber cerrado cuanto por su valor formativo en la enseñanza, y no de un análisis de la estructura y de la organización propios de la actividad matemática escolar. Precisa:

> El discurso que se hace sobre las matemáticas se desliza a menudo entre las matemáticas como artefacto cultural compartido […] como cuando hablamos

> sobre el aprendizaje de funciones, polinomios, factorización, teoría de anillos y álgebra lineal entre otras cosas y las matemáticas como modo de pensar, generalizar, concretar, abstraer, calcular, establecer analogías, justificar, etc. Para explicar el álgebra necesitamos adoptar ambas perspectivas. Por último, la caracterización del razonamiento algebraico según el tipo de objetos matemáticos tratados resulta inadecuado. Los estudiantes (…también…) podrían razonar abstractamente al mismo tiempo que utilizan números específicos, quizás sólo de forma oral, sin escribir nada (Kaput, 1996, p. 88).

Nos parece importante destacar, por estar también próximo a la interpretación del álgebra como instrumento de modelización, que en la reforma del *álgebra escolar* presentada por Kaput (1996), en la tercera fase, y respecto a la amplitud del álgebra, este autor considere:

> El álgebra se trata menos como una asignatura propiamente dicha y más como un medio general y ubicuo para la creación, expresión y manipulación de generalizaciones y abstracciones, como un medio para la creación de modelos y como un conjunto de lenguajes de programación informática que sirve también para crear patrones fenomenológicos. […]. Los diferentes aspectos del álgebra se tornan hábitos mentales, maneras de observar y actuar matemáticamente (Ibid, p. 93-94).

Es decir, Kaput reclama para el *álgebra escolar* un mayor énfasis de aquellos aspectos que retoman los indicadores **MA3**, **MA6** y **MA8**.

Otro autor, Vizmanos (1997, p. 55), considera que los contenidos algebraicos que estudian los alumnos en la etapa preuniversitaria según los actuales currícula, son los siguientes:

Polinomios: operaciones
Expresiones algebraicas: operaciones
Resolución de ecuaciones de primer grado
Resolución de inecuaciones de primer grado
Resolución de ecuaciones de segundo grado
Estudio de inecuaciones de segundo grado
Resolución de ecuaciones cúbicas con una solución entera
Resolución de ecuaciones bicuadradas
Resolución de ecuaciones algebraicas de grado *n* con *n-2* soluciones enteras
Resolución de ecuaciones irracionales
Resolución de ecuaciones trascendentes
Matrices: operaciones
Determinante de una matriz cuadrada. Matriz inversa
Sistemas de ecuaciones lineales: Métodos de Gauss, Cramer y Rouche

Aunque dichos contenidos incluyen la etapa de Bachillerato, el *álgebra elemental* queda recogida entre los primeros, observando la fuerte presencia del cálculo y la manipulación formal, que corresponderían a los indicadores: **AG3**, **AG4** y **AG9**.

En 1998, la Sociedad Madrileña de Profesores de matemáticas publicó un artículo (*Suma* 27) evaluando y analizando las condiciones de implantación de las matemáticas en la Educación Secundaria Obligatoria, saliendo al paso a informaciones y opiniones que señalaban el fracaso escolar de las matemáticas en la ESO, en relación a otros estudios comparativos internacionales. En la misma revista, en la que se presenta la publicación de una conferencia impartida por el profesor Bishop (1998, p. 28) en la que bajo el título "Equilibrando las necesidades matemáticas de la educación general con las de la instrucción matemática de los especialistas" deja constancia de que el problema del desarrollo del currículum de matemáticas para alumnos de la etapa 12-16 es un fenómeno universal. "Es un problema al que se ha hecho frente en muchos países, no sólo en Cataluña o en España". Respecto al *álgebra elemental* indica que la presencia de las calculadoras y los ordenadores en el aula ha suscitado que "las manipulaciones y algoritmos complejos ya no son necesarios en la enseñanza del álgebra. La atención debería dirigirse a las estructuras conceptuales involucradas, y a la obtención y demostración de relaciones algebraicas más que a los algoritmos y manipulaciones".

Por otra parte, las explicaciones que ofrecen la inmensa mayoría de los investigadores ante los fracasos, en particular, ante los problemas de adquisición del lenguaje algebraico, así como a los errores que cometen los estudiantes, presupone, según Gascón (1993, p. 307), "un punto de vista epistemológico que interpreta, incluso explícitamente, el álgebra como aritmética generalizada. Se considera así que los errores en álgebra surgen, esencialmente, como consecuencia de generalizaciones erróneas establecidas en aritmética y, a la vez, como consecuencia de no disponer de una formalización adecuada de los métodos aritméticos desde los cuales sea posible generalizar según las necesidades del álgebra".

En esta línea, el Grupo Azarquiel (1994) consideraba en sus trabajos que las principales dificultades de los alumnos en la resolución de problemas de enunciado verbal está en el planteamiento y en una formalización inadecuada de los métodos aritméticos (indicadores **AG11** y **AG12**).

Creemos que, en los inicios del siglo XXI, no existen nuevos estudios que permitan explicar los errores y dificultades que tienen los alumnos en la utilización del lenguaje algebraico, tanto en sus aspectos sintáctico como semántico. Podemos interpretar este hecho como síntoma de cierto agotamiento del campo o, mejor, como la necesidad aunque sea implícita, de estudiar cuestiones que hasta ahora aparecían transparentes. Kaput

(1996) inicia su reflexión respecto al *álgebra escolar* preguntándose qué entendemos por *álgebra elemental* y sugiriendo la necesidad de ampliar la noción de álgebra.

Recientemente los estudios de Filloy (1999, p. 176-177) muestran cómo un sistema matemático de signos (SMS) predetermina la forma de analizar los problemas, así como la utilización de diferentes estrategias, lenguajes y hábitos en su resolución. La construcción del lenguaje aritmético-algebraico como un nuevo SMS, y por lo tanto como una nueva herramienta de estudio, pasará "por la necesidad de operar nuevos objetos, que significarán no sólo números, sino también representaciones de éstos ya sea como individuos, ya como conjuntos de números, ya como expresión de relaciones entre conjuntos de números, o ya sea como funciones, etc." Parece, pues, imprescindible retomar el problema del *álgebra escolar* desde otros puntos de vista.

Los trabajos de divulgación en nuestro país, respecto a las matemáticas en la Secundaria Obligatoria, se han dirigido hacia una evaluación de la reforma educativa. Como consecuencia de las evaluaciones aportadas, se ha aumentado el número de horas semanales dedicadas a la asignatura de matemáticas, y está en proceso la elaboración y posterior aprobación la ley de calidad de la educación que pretende aportar soluciones a los fracasos detectados en nuestro sistema educativo.

En resumen, podemos afirmar que por lo general, los textos producidos en la noosfera interpretan de una forma muy predominante el *álgebra escolar* tal como aparece en el currículum de la Enseñanza Secundaria Obligatoria como una *aritmética generaliza*, en los términos que hemos expuesto en el capítulo anterior.

2. EL *ÁLGEBRA ESCOLAR* EN LOS LIBROS DE TEXTO

2.1. El carácter prealgebraico del currículum actual

En un trabajo relativamente reciente, Gascón (1999_a), hacía referencia al *carácter prealgebraico* de las matemáticas en el seno de la organización matemática escolar, entendiendo como tal, la ausencia, o presencia limitada, fragmentada o muy poco desarrollada de lo que hemos denominado *instrumento algebraico*:

> La matemática escolar, en el ámbito de la enseñanza obligatoria (12-16 años), tiene un carácter marcadamente prealgebraico en el sentido de "aún no algebrizada" y, lo que es más importante, no está organizada para provocar una progresiva algebrización de la actividad matemática" (Gascón, 1999_a, p. 77-78)

El término "desalgebrización" ya había sido utilizado con anterioridad, aunque con matices diferentes. En un artículo para profesores de F. Velázquez (1991, p. 59) manifiesta la preocupación de los docentes de secundaria por "la desalgebrización de la enseñanza obligatoria", entendiendo con ello la "desaparición o infravaloración del aspecto matemático que posee mayor grado de formalización y que, por tanto, es el instrumento más potente de desarrollo de las capacidades de abstracción y de aplicación del aspecto verbal y comunicativo de las matemáticas". Su propuesta se concreta en posibilitar "un adiestramiento más profundo en ejercicios referidos a una aritmética generalizada, [...] siempre que el diseño instruccional empleado se relacione con el desarrollo cognitivo de los alumnos" (Ibid., p. 63)

Ahora bien, los argumentos teóricos aportados por Josep Gascón hacen referencia al hecho de que, aunque existen ciertos indicios aparentemente algebrizantes de la matemática escolar, estos rasgos de algebrización no van más allá de la *aritmética generalizada*, frente a lo que hemos considerado como *modelización algebraica* o instrumento de modelización algebraica. A este respecto las ausencias más significativas en la organización matemática escolar son, entre otras, las siguientes:

— No se produce la presunta unidad funcional que representa lo algebraico, es decir, se produce una fuerte autonomía de los diferentes bloques de contenido y la *desintegración del corpus algebraico* (Chevallard, 1989).

— Las letras juegan el único papel de incógnitas, los parámetros están ausentes, lo que impide estudiar la estructura global de los problemas.

— Las fórmulas, que prácticamente sólo están presentes en el cálculo de áreas y volúmenes de cuerpos geométricos, no aparecen como fruto de un trabajo algebraico, su papel es el de facilitar *"reglas" para automatizar ciertos cálculos.*

El estudio que presentamos a continuación tiene como objeto describir las actividades algebraicas que se enseñan en la ESO, partiendo del material empírico formado por los principales libros de texto. Con ello nos proponemos aportar argumentos empíricos que nos permitan, ilustrar y concretar las características más relevantes de lo que consideramos el carácter prealgebraico de la matemática escolar. Mas concretamente, en nuestra exploración intentaremos dar respuesta a las tres preguntas siguientes:

P´1: ¿El *álgebra escolar* que se presenta en el currículum de Secundaria, se puede describir como una organización matemática con sus componentes: tipos de tareas, T; tipos de técnicas, τ; tecnologías, θ; y teorías, Θ?

P´´1: ¿En Secundaria se utiliza la *modelización algebraica*, aunque sea de forma implícita, para estudiar algunas organizaciones matemáticas?

P´´´1: ¿Qué *grado de algebrización* tienen las diferentes organizaciones matemáticas que se estudian en Secundaria?

Veremos que la respuesta que aportan los libros de texto a estas cuestiones puede enunciarse como una primera hipótesis de la siguiente forma:

> El *álgebra escolar no* aparece explícitamente en la ESO, ni como una organización matemática bien delimitada, ni como un *instrumento de modelización* de organizaciones previamente construidas. En cualquier caso, las organizaciones matemáticas que se estudian en la ESO tienen un grado de algebrización muy bajo.

2.2. La ausencia de una organización matemática local en torno al *álgebra escolar*

Empezaremos nuestro estudio exploratorio por un primer nivel de análisis de la actividad matemática "algebrizada" que se realiza en la ESO, en el que consideramos la organización matemática como algo estático, es decir, como el producto final de un proceso de transposición didáctica. No entraremos pues en el estudio del proceso de reconstrucción de las obras escolares, que correspondería a un análisis dinámico del proceso didáctico de las obras matemáticas escolares.

Hemos tomado como material de observación los textos escolares publicados a mediados de los 90 correspondientes a las editoriales MacGraw-Hill, y Editex de toda la Educación Secundaria Obligatoria.

Estas editoriales se encuentran entre las de mayor difusión como libros de texto debido, en parte, a su precoz aparición en el mercado. Nuestro estudio queda sujeto, evidentemente, a una posible ampliación y contraste con los textos de otras editoriales.

Si analizamos el *álgebra escolar* en términos de presunta organización matemática debemos preguntamos acerca de las siguientes cuestiones (Gascón 1996):

1. ¿Cuáles son las cuestiones iniciales a las que responde el á*lgebra escolar?*
2. ¿Qué tipos de problemas aparecen como cristalización de dicha problemática?
3. ¿Qué tipos de técnicas son utilizadas inicialmente para abordar los problemas?
4. ¿Cómo evolucionan dichas técnicas a lo largo del proceso de estudio?
5. ¿Qué discursos tecnológicos se utilizan para interpretar y justificar las técnicas?
6. ¿Cuál es el marco teórico que sirve como justificación última de la obra que queremos reconstruir?
7. ¿Qué relaciones pueden establecerse entre el álgebra escolar como presunta organización matemática y el resto de las organizaciones matemáticas estudiadas en el mismo currículum escolar?

Tras un análisis pormenorizado de los textos mencionados podemos hacer las siguientes observaciones, respecto a las preguntas anteriormente citadas:

- **EDITORIAL MACGRAW-HILL: Matemáticas 1º ESO**

— UNIDAD 1: Números naturales

En esta unidad no aparece ningún tipo de terminología matemática, ni ninguna alusión a las estructuras algebraicas y de orden.

— UNIDAD 2: Potencias. Raíz Cuadrada.

Se presenta por vez primera el uso de la letra como generalización de un número.

— UNIDAD 3: Divisibilidad

Sigue el uso de la letra como generalización de un número y se presentan reglas y criterios de divisibilidad obtenidos de forma experimental por el alumno en actividades concretas.

— *UNIDAD 4: Fracciones y Decimales*

— *UNIDAD 5: Operaciones con Fracciones y Números Decimales*
No existe ninguna justificación de las reglas de cálculo, que son aplicación directa de reglas experimentales, obtenidas visualmente del significado de fracción como parte de la unidad.

— *UNIDAD 6: Proporcionalidad Numérica*
Aplicación directa de reglas dadas verbalmente.

— *UNIDAD 7: Gráficas*
De los puntos a las gráficas. La gráfica como lenguaje, como medio de comunicación.

— *UNIDAD 8: Introducción a la Geometría*

— *UNIDAD 9: La medida*

— *UNIDAD 10: Medida del Tiempo y de los Ángulos*
Actividades de medición directa y de cambio de unidades.

— *UNIDAD 11: Figuras Planas*
Cálculo de longitudes y áreas utilizando fórmulas en las que aparecen letras para abreviar la escritura (lenguaje sincopado) de forma no sistemática.

— *UNIDAD 12: Cuerpos Geométricos*

— *UNIDAD 13: Introducción al azar*

En resumen podemos decir que el carácter de las organizaciones matemáticas de este nivel es muy *puntual*, se generan alrededor de dos tipos fundamentales de tareas: el cálculo numérico y el reconocimiento e identificación de formas y relaciones geométricas sencillas. No existe cuestionamiento tecnológico. Se usan propiedades y reglas obtenidas por el alumno o gestionadas por el profesor de forma experimental. Se presentan las actividades como colecciones aisladas de problemas.

- **EDITORIAL MACGRAW-HILL: Matemáticas 2º de ESO**

— *UNIDAD 1: Números Enteros*

Los números negativos surgen en sistemas extramatemáticos, de la necesidad de expresar ciertas situaciones reales: deudas, desplazamientos, retroceder, bajar, etc. Necesidades culturales, no matemáticas. En algunos casos, los significados culturales y matemáticos son contradictorios.

— *UNIDAD 2: Operaciones con Números Enteros*
Uso de reglas experimentales que extienden la forma de hacer en N.

— *UNIDAD 3: Fracciones y Decimales*
Uso de reglas verbales para las operaciones, que se obtienen por experimentación, generalización o "inducción", de l*a observaci*ón de un ejemplo concreto.

— *UNIDAD 4: Álgebra*
No existe ninguna cuestión inicial y por lo tanto no existe un tipo de problemas asociado a las cuestiones, que de origen y sentido al álgebra. El álgebra aparece como un *nuevo lenguaje*.
Se insiste, en reiteradas ocasiones, que "Las operaciones con letras cumplen la*s mismas propiedad*es que las que se efectúan con números" (p. 67).
Se presenta la ecuación como una herramienta muy potente y eficaz (p. 81) pero no se presenta el cálculo ecuacional como parte del instrumento algebraico.
Se observa una gran ausencia del cálculo algebraico elemental: suma de monomios semejantes, productos, etc. que el alumno debe gestionar por sí mismo. Es decir el cálculo algebraico aparece trivializado, transparente, sin conflictos.
Se presentan algunos elementos tecnológicos que proceden del álgebra geométrica, y que sirven de apoyo para visualizar ciertas relaciones: propiedad distributiva, cuadrado de un binomio, etc. (p. 69).
La ausencia de la estructura de grupo impide nuevamente la justificación de las reglas de transposición de términos y por ello se genera una tecnología artificiosa y particular que permite visualizar de forma aislada ciertas reglas.

— *UNIDAD 5: Proporcionalidad Numérica*
En esta unidad la letra aparece como incógnita en las actividades de obtener términos, y como generalización de un número en las propiedades de las proporciones.

— *UNIDAD 6: Proporcionalidad Geométrica*

— *UNIDAD 7: Medida*

En las mediciones indirectas, aparecen fórmulas como reglas para calcular.

— *UNIDAD 8: Circunferencias y círculos*

— *UNIDAD 9: Figuras Planas*

— *UNIDAD 10: Movimientos en el Plano*

— *UNIDAD 11: Gráficas y Funciones*

— *UNIDAD 12: Estadística*

— *UNIDAD 13: Azar y Probabilidad*

Aunque puede apreciarse ciertos inicios aparentemente algebrizantes de la organización matemática escolar, en este nivel, tampoco podemos encontrar respuesta a las preguntas señaladas anteriormente.

❖ **EDITORIAL MACGRAW-HILL: Matemáticas 3º ESO**

— *UNIDAD 1: Números*

No se establece ninguna relación entre el "álgebra" estudiada en el curso anterior y la ampliación del estudio del sistema de los números (naturales, racionales, enteros, …). Se presentan reglas verbales y "consignas" para la suma de fracciones sencillas (p. 13) y una aproximación para "sumar fracciones a cuyos denominadores no les encontramos fácilmente múltiplos comunes" (p. 14). Una formalización del producto (p. 15) y la potencia (p. 18), pero el uso funcional y la instrumentalidad de esta modelización es mínima.

— *UNIDAD 2: Secuencias Numéricas*

En este tema existe una gran confusión en los conceptos de término general, secuencia y lugar que ocupa un término, que puede ser debido a la ausencia del concepto matemático de sucesión y su notación Se presenta una naturalización de la construcción del modelo algebraico "el nombre de los números" (capítulo III).

— *UNIDAD 3: Símbolos y Ecuaciones*

Se mantiene la aparición del *álgebra como un nuevo lenguaje* pero se precisan parte de sus objetos: los símbolos.

- "El Álgebra es un lenguaje de símbolos" (p. 51).
- "Una expresión algebraica es una combinación de números, letras y, por lo menos de una operación que los una entre sí" (p. 51).

- Su poder instrumental se reduce a la "FACILIDAD con la que se resuelven los problemas" (p. 52).
- "Las ecuaciones equivalen en Álgebra a frases de nuestro lenguaje natural. Todas deben contener el signo igual y, por lo menos, una incógnita representada por una letra".
- "La incógnita es el valor que se trata de averiguar" (p. 54).
- Se potencia el uso de la inicial de la palabra como símbolo (el álgebra como un lenguaje sincopado).

Sigue sin aparecer una cuestión inicial que dé sentido al álgebra, solamente se justifica por la "facilidad" con que permite resolver problemas, sin ninguna sistematización y con una gran fragmentación y aislamiento de los tipos de actividades.
Las reglas de manipulación de las ecuaciones y los símbolos aparecen como consignas y no existen elementos tecnológicos que justifiquen las técnicas. "Una igualdad se representa por una *balanza en equilibrio*" (p. 56, 61).

— UNIDAD 4: Gráficas y Funciones
Se trivializa el cambio de lenguajes: del texto a los datos, de los datos a la gráfica, de la gráfica a la expresión algebraica, la traducción parece espontánea.

— UNIDAD 5: Funciones y Proporcionalidad
La aplicación práctica de la función lineal, afín, hiperbólica permitirían mostrar la potencia de las expresiones algebraicas para predecir.

— UNIDAD 6: Figuras y Formas Geométricas

— UNIDAD 7: Medidas

— UNIDAD 8: Azar

— UNIDAD 9: Probabilidad

— UNIDAD 10: Estadística

A modo de resumen diremos que este curso presenta una organización matemática sin ningún cuestionamiento tecnológico, con algunas justificaciones basadas en pruebas experimentales. Ausencia de estructuras algebraicas que permitan justificar las reglas de transposición en las igualdades. Ausencia del trabajo operatorio con expresiones algebraicas. Aislamiento y desconexión de la terminología (solo se usan los términos álgebra, ecuación etc., en el tema dedicado a ello).

- **EDITORIAL MACGRAW-HILL: Matemáticas 4º ESO**

— *UNIDAD 1: La Armonía de los Números*

Un título muy bonito, pero sigue sin establecerse relación alguna entre el "álgebra" estudiada en los cursos anteriores y la ampliación del estudio del sistema de los números.

— *UNIDAD 2: Aplicaciones de las ecuaciones*

Sigue justificándose la necesidad del álgebra manteniendo la afirmación de que "El lenguaje algebraico sirve para tratar los problemas con más facilidad"(p. 35). Las actividades de:

- Construcción del modelo: Se limitan a traducir del lenguaje natural al simbólico, mediante un proceso naturalizado y transparente que da lugar a expresiones algebraicas, ecuaciones y sistemas. O a la aplicación de fórmulas conocidas previamente.
- Trabajo del modelo: Resolución de ecuaciones y sistemas de ecuaciones y comprobación de resultados. Operaciones aisladas con polinomios.

— *UNIDAD 3: Características Globales de las Funciones*

Bajo el título "global" se estudian propiedades que son "locales" en la terminología matemática. Existe una ausencia no sólo del instrumento algebraico, sino del lenguaje matemático en todos los conceptos que aparecen, incluso se inducen posibles errores derivados del uso del lenguaje habitual (p. 70-77): creciente-aumento, decreciente-disminución, mínimo-horas valle, máximo-horas punta, dominio-tramos de recorrido, asíntotas-tendencias, continuidad-no interrupción, discontinuidad-saltos, periodicidad-repetición, origen de coordenadas, etc.

— *UNIDAD 4: Familias de Funciones*

Las familias de funciones presentadas son la lineal, cuadrática, exponencial e hiperbólica, apareciendo el uso de parámetros -elementos conocidos que se tratan como desconocidos- en las expresiones algebraicas de dichas funciones. Se tratan características "globales" de estas familias de funciones sin elementos tecnológicos adecuados. Las técnicas y reglas de reconocimiento surgen de la generalización de ejemplos concretos.

— *UNIDAD 5: Movimientos en el plano*

— *UNIDAD 6: Poliedros y Cuerpos Redondos*
Modelos algebraicos a través de fórmulas conocidas en el cálculo de mediciones indirectas.

— *UNIDAD 7: La Esfera y la Superficie Terrestre*
Modelos algebraicos a través de fórmulas conocidas en el cálculo de mediciones indirectas.

— *UNIDAD 8: Estadística*
Cálculos con fórmulas.

— *UNIDAD 9: Distribuciones Bidimensionales*
Cálculos con fórmulas.

— *UNIDAD 10: Probabilidad*
Cálculos con fórmulas.

Por todo lo expuesto podemos concluir que en los textos de matemáticas de la editorial MACGRAW-HILL para la enseñanza Secundaria:

- No existe una problemática específica del *álgebra escolar*, esto es, no existe una problemática a la que el *álgebra escolar* responda.
- El *álgebra escolar* no se presenta como una organización matemática autónoma que surge del estudio de ciertas cuestiones matemáticas o extramatemáticas, como puede ser la aritmética o la geometría escolar.
- Que el *álgebra escolar* no es una obra matemática estudiable en la escuela.

❖ **EDITORIAL EDITEX: Matemáticas 1º Ciclo (curso 1º ESO)**

** BLOQUE TEMÁTICO I: Números*

— *UNIDAD DIDÁCTICA 1: Números naturales y enteros. Operaciones*

— *UNIDAD DIDÁCTICA 2: Múltiplos y divisores*

— *UNIDAD DIDÁCTICA 3: Fracciones*

— *UNIDAD DIDÁCTICA 4: Fracciones y decimales*

— *UNIDAD DIDÁCTICA 5: Proporcionalidad numérica*

Las actividades presentadas en las unidades didácticas 1, 2, 3, 4, y 5 no precisan del instrumento algebraico. Son actividades de cálculo o búsqueda de números desconocidos mediante operaciones inversas y cálculos aritméticos. Las técnicas y tecnología asociadas se reducen a una colección de "reglas" que el alumno debe aplicar.

Analizamos más detalladamente la unidad didáctica 6 por entender que puede ser el tema que trate las cuestiones consideradas como "algebraicas" en la institución escolar.

— UNIDAD DIDÁCTICA 6: Lenguaje Algebraico

No se presenta ninguna problemática inicial que de sentido al lenguaje algebraico. Las nociones generales respecto al papel de las letras en las expresiones algebraicas expresan:

> Ya en la unidad anterior hemos utilizado letras para representar números que desconocíamos en un principio (p. 76).
> Observa que una variable expresa una cantidad de una cualidad de un objeto (p. 78).
> Una identidad es toda igualdad entre expresiones algebraicas equivalentes (p. 84).
> Se llama ecuación a toda igualdad entre expresiones algebraicas que sólo se cumple para algunos valores de las variables.
> Resolver una ecuación consiste en calcular los valores de la incógnita que verifican la igualdad (p. 84).

Las actividades y técnicas asociadas se centran en la traducción y reconocimiento de expresiones algebraicas mediante la naturalización del lenguaje (uso de la inicial como variable) y la observación de la expresión. El trabajo del modelo, es decir, la manipulación de expresiones algebraicas se justifica con el soporte geométrico, "álgebra geométrica".

En resumen, el tema del lenguaje algebraico no da respuesta a las seis primeras cuestiones que nos permitirían hablar de una obra matemática.

La cuestión 7, acerca de las relaciones que pueden establecerse entre el álgebra y otras organizaciones del currículo escolar, las comentamos a continuación:

** BLOQUE TEMÁTICO II: Geometría y medida*

— UNIDAD DIDÁCTICA 7: Rectas, planos y ángulos

— UNIDAD DIDÁCTICA 8: Formas y figuras planas

— UNIDAD DIDÁCTICA 9: La medida. Sistema métrico decimal

— UNIDAD DIDÁCTICA 10: Áreas y longitudes en figuras planas

— UNIDAD DIDÁCTICA 11: Medida del tiempo

— UNIDAD DIDÁCTICA 12: Medida de ángulos

En este Bloque Temático II nos centramos en las unidades didácticas relacionadas con la medida que es donde pueden surgir actividades que deban resolverse con modelos algebraicos.
En las mediciones indirectas se aplican las fórmulas como reglas para calcular, los elementos tecnológicos se basan en aspectos experimentales.

** BLOQUE TEMÁTICO III: Tratamiento de la Información*

— UNIDAD DIDÁCTICA 13: Introducción a las relaciones funcionales

— UNIDAD DIDÁCTICA 14: Recuento y representación de datos
Se presenta el lenguaje gráfico como alternativa al lenguaje de las tablas de datos.

En resumen, podemos repetir las mismas observaciones que realizamos en el estudio de este mismo nivel con el texto de la editorial McGraw-Hill, es decir, podemos concluir que el carácter de las organizaciones matemáticas de este nivel es muy *puntual*, éstas se generan alrededor de dos tipos fundamentales de tareas: el cálculo numérico y el reconocimiento e identificación de formas y relaciones geométricas sencillas. No existe cuestionamiento tecnológico. Se usan propiedades y reglas obtenidas por el alumno o gestionadas por el profesor de forma experimental. Se presentan las actividades como colecciones aisladas de problemas

❖ **EDITORIAL EDITEX: Matemáticas 2º ESO**

** BLOQUE TEMÁTICO I: Números*

— UNIDAD DIDÁCTICA 1: Divisibilidad en los números enteros

— UNIDAD DIDÁCTICA 2: Números racionales

— UNIDAD DIDÁCTICA 3: Potencias y raíces

— UNIDAD DIDÁCTICA 4: Aproximaciones y redondeos

— UNIDAD DIDÁCTICA 5: Proporcionalidad directa e inversa

— UNIDAD DIDÁCTICA 6: Expresiones algebraicas

— UNIDAD DIDÁCTICA 7: Ecuaciones. Ecuación de primer grado

En las unidades didácticas 1, 2, 3, 4 y 5 se profundiza y amplía el estudio de *lo numérico*, introduciendo nuevos conceptos y objetos matemáticos pero dentro del marco aritmético, es decir, en el estudio de los sistemas numéricos no se utilizan modelos algebraicos.

En las Unidades didácticas 6 y 7, que hacen referencia explícita a *lo algebraico*, las expresiones algebraicas nacen de la traducción del lenguaje natural al de los símbolos, a través de un proceso naturalizado, usando la inicial de la palabra en la formación de las expresiones. El trabajo en los modelos obtenidos, es decir, la manipulación de expresiones y la resolución de ecuaciones se realiza mediante reglas que el alumno debe aplicar imitando lo que el texto hace en un caso concreto. La tecnología asociada a las técnicas indicadas pertenece al "álgebra geométrica" en el caso de justificación de algunas propiedades y a pruebas experimentales de equilibrio de balanzas en el caso de transposiciones de términos en ecuaciones.

** BLOQUE TEMÁTICO II: Geometría y medida*

— UNIDAD DIDÁCTICA 8: Polígonos. Circunferencia y círculo

— UNIDAD DIDÁCTICA 9: Traslaciones, giros y simetrías

— UNIDAD DIDÁCTICA 10: Semejanza

— UNIDAD DIDÁCTICA 11: Triángulos. Teorema de Pitágoras

— UNIDAD DIDÁCTICA 12: Cuerpos geométricos

— UNIDAD DIDÁCTICA 13: Áreas y volúmenes de cuerpos geométricos

Igual que en los cursos anteriores, nos centramos, en primer lugar, en las unidades didácticas relacionadas con la *medida* que es donde pueden surgir actividades que deban resolverse con modelos algebraicos.

En las mediciones indirectas se aplica el teorema de Pitágoras como una regla para calcular longitudes. Los elementos tecnológicos asociados se basan en el "álgebra geométrica", en la descomposición y recomposición de una misma figura.

En la unidad didáctica dedicada al estudio de los movimientos en el plano se presentan modelos algebraicos para las traslaciones y para las simetrías de ejes paralelos a los de coordenadas y modelos figurativos para los giros. No aparece nada que justifique el cambio de herramienta matemática.

** BLOQUE TEMÁTICO III: Tratamiento de la información y el azar*

— UNIDAD DIDÁCTICA 14: Funciones y gráficas

— UNIDAD DIDÁCTICA 15: Función constante y de proporcionalidad directa

— UNIDAD DIDÁCTICA 16: Introducción a la estadística

— UNIDAD DIDÁCTICA 17: El azar

Este bloque se inicia con las primeras nociones asociadas a las funciones reales de variable real: Dominio, recorrido, variables dependientes e independientes, continuidad (un sólo trazo), discontinuidad (saltos bruscos), crecimiento, máximos, mínimos dados en el lenguaje gráfico y en casos concretos. Las traducciones del texto a la gráfica, a tabla y de la tabla a la gráfica, se presentan naturalizadas, no se precisa de modelos algebraicos. Se produce un juego de marcos: continuo-discreto que el alumno debe gestionar. El soporte real en las actividades presentadas y la falta del paso a la expresión algebraica limitan la potencialidad de la función, y el conocimiento que puede proporcionar del sistema estudiado.

Sólo se trabajan modelos de funciones constantes y de proporcionalidad directa mediante la visualización de la gráfica, o el reconocimiento de una determinada forma de su expresión algebraica "$y=k$" o "$y=ax$". El estudio de la probabilidad re reduce a cálculos con fórmulas.

- **EDITORIAL EDITEX: Matemáticas 2º Ciclo ESO**

** BLOQUE TEMÁTICO I: Números y operaciones: significados, estrategias y simbolización*

— UNIDAD DIDÁCTICA 1: Números naturales y enteros

— UNIDAD DIDÁCTICA 2: Números fraccionarios y decimales

— UNIDAD DIDÁCTICA 3: Proporcionalidad numérica

— UNIDAD DIDÁCTICA 4: Ecuaciones

— UNIDAD DIDÁCTICA 5: Polinomios

En el estudio de *lo numérico* sólo se presentan modelos algebraicos para obtener la fracción generatriz de un decimal. Las operaciones con negativos y la divisibilidad se presenta a través de reglas que el alumno debe aplicar sin ningún tipo de justificación.

Las unidades didácticas 4 y 5 que hacen referencia a *lo algebraico*, presentan actividades de traducción del lenguaje natural a la expresión algebraica a través de un proceso de naturalización. Se crean modelos algebraicos para establecer razonamientos sobre relaciones numéricas, es decir, se inicia algún cuestionamiento tecnológico.

En el tema de polinomios se inicia el cálculo algebraico a través de reglas algorítmicas para las distintas operaciones. El tema se presenta de forma aislada y desconectado del lenguaje algebraico.

** BLOQUE TEMÁTICO II: Medida, estimación y cálculo de magnitudes*

— UNIDAD DIDÁCTICA 6: Sistema Métrico Decimal. Sistema Internacional

— UNIDAD DIDÁCTICA 7: Medición indirecta

Las mediciones indirectas se realizan aplicando las fórmulas que actúan a modo de reglas.

** BLOQUE TEMÁTICO III: Representación y organización del espacio*

— UNIDAD DIDÁCTICA 8: Cuerpos

— UNIDAD DIDÁCTICA 9: Figuras planas

— UNIDAD DIDÁCTICA 10: Semejanza. Escalas

— UNIDAD DIDÁCTICA 11: Movimientos en el plano

El estudio de este bloque temático no está vinculado con el *álgebra escolar*.

** BLOQUE TEMÁTICO IV: Interpretación, representación y tratamiento de la información*

— UNIDAD DIDÁCTICA 12: Dependencia funcional. Interpretación de gráficas

— UNIDAD DIDÁCTICA 13: Funciones cuya gráfica es una recta

— UNIDAD DIDÁCTICA 14: Introducción a la Estadística

— UNIDAD DIDÁCTICA 15: Gráficas y parámetros estadísticos

En este nuevo curso, se reiteran las actividades de reconocimiento e identificación de conceptos como: dominio, recorrido, variables, continuidad (trazo continuo), discontinuidad (a saltos) manteniendo el lenguaje gráfico y los casos concretos. Así como las traducciones espontáneas, del texto a la gráfica o a la tabla de valores, de la tabla de valores a la gráfica y de la expresión algebraica a la tabla de valores. Las funciones estudiadas con modelos algebraicos son las funciones lineales, afines y constantes.
El recuento de datos, la elaboración de tablas y gráficas así como el cálculo de estadísticos se realiza mediante la aplicación de fórmulas.

Igual que en el curso anterior, la falta del paso de la situación extramatemática a la expresión algebraica limita la potencialidad de la función, y el conocimiento que ésta puede proporcionar del sistema estudiado.

** BLOQUE TEMÁTICO V: Tratamiento del azar*

— UNIDAD DIDÁCTICA 16: Introducción a los conceptos del azar y las formas de contar

— UNIDAD DIDÁCTICA 17: Leyes de los grandes números

— UNIDAD DIDÁCTICA 18: Asignación de probabilidades

El tratamiento del azar y el cálculo de probabilidades se realiza mediante diagramas en árbol y la aplicación de fórmulas.

El *álgebra escolar* aparece, en resumen, bien como un instrumento que algebriza de una manera muy incompleta y fragmentada ciertas obras matemáticas escolares, bien como un conjunto muy disperso de organizaciones *puntuales* y aisladas, cada una de las cuales está generada por un tipo de tareas.que se generan alrededor de un tipo de tareas.

2.3. La ausencia escolar del álgebra como instrumento de modelización

Para determinar hasta qué punto el *álgebra escolar* juega el papel de instrumento de modelización, usaremos nuestro modelo alternativo que pone el énfasis en el *proceso de algebrización*. Recordemos que este proceso afecta a obras matemáticas previamente construidas en la institución escolar (obras prealgebraicas) que juegan el papel de *sistema a modelizar* y que la modelización algebraica convierte en *obras* *algebrizadas*. En el análisis de los tipos de actividades que se realizan en la ESO utilizaremos, por una parte, los indicadores **MA** que caracterizan la interpretación del álgebra escolar como instrumento de modelización y, por otra, el esquema general del trabajo de modelización matemática que propone Chevallard (1989d) y que como ya hemos dicho está formado por cuatro estadios:

(i) Problemática inicial
(ii) Construcción del modelo
(iii) Trabajo del modelo
(iv) Problemas nuevos

Este esquema se puede descomponer tanto horizontal como verticalmente, permitiendo la distinción de subtipos de tareas y de agrupaciones en categorías más o menos grandes. Lo utilizaremos para describir qué tipo de fragmentación de la actividad de modelización algebraica aparece en el currículum de la educación secundaria actual y qué importancia se atribuye a los distintos subtipos de tareas que la componen.

En un primer momento, podemos descomponer el proceso de modelización algebraica siguiendo la dirección vertical del mapa y distinguir dos grandes grupos de tareas: el primero corresponde a la modelización de un sistema utilizando *variables y parámetros* y el segundo a la modelización de un sistema distinguiendo únicamente *datos e incógnitas*, es decir valores conocidos y valores desconocidos.

Esta primera descomposición, que representamos gráficamente en forma de un "mapa de problemas algebraicos" (ver *Fig. 1*), establece en cada etapa del trabajo de modelización los siguientes elementos:

(i) La problemática inicial está formada por cuestiones relativas a diferentes tipos de sistemas a estudiar, que corresponden a organizaciones no algebrizadas. En principio, la distinción anterior no establece ninguna separación entre los tipos de sistemas estudiados: el que en un sistema se distingan diferentes variables o únicamente una incógnita es algo que no depende generalmente del tipo de sistema sino del tipo de modelo que se pretende construir.

(ii) La construcción del modelo, es decir el primer establecimiento de expresiones algebraicas descriptivas de la situación estudiada, sí se va a dividir en dos grandes subtipos de actividades que hemos diferenciado en (a) y (b), según se construya un modelo con varias variables/parámetros (a) o únicamente con datos conocidos/datos desconocidos (b), lo que al nivel considerado, conduce generalmente a trabajar con ecuaciones con una sola incógnita.

(iii) El trabajo del modelo, que incluye tanto la manipulación y transformación de expresiones como su interpretación, queda a su vez dividido en dos subtipos: (d), (g) y (j) si trabajamos con variables/parámetros y (h), (e) y (k) si trabajamos con datos/incógnitas. De esta forma separamos las tareas de sustituir y despejar en fórmulas conocidas —(g) (h) (i)— de la actividad de resolución de ecuaciones y búsqueda de incógnitas que corresponden a las tareas (e) y (f).

(iii) A los subtipos de tareas anteriores, hemos añadido tres casos más, que designamos como (c), (f) e (i), y que corresponden a las tareas de manipulación y transformación de expresiones algebraicas que, aunque van más allá de las propias necesidades de la modelización, juegan un papel importante en la construcción y evolución de la actividad global de modelización algebraica.

(iv) Finalmente aparece la última etapa del proceso de modelización, que sirve de motor para relanzar el trabajo matemático de estudio de sistemas y que engloba la formulación y generación de problemas nuevos acerca del sistema modelizado y más allá, así como la organización de los resultados obtenidos previamente.

MAPA DE PROBLEMAS "ALGEBRAICOS" DE LA ESO

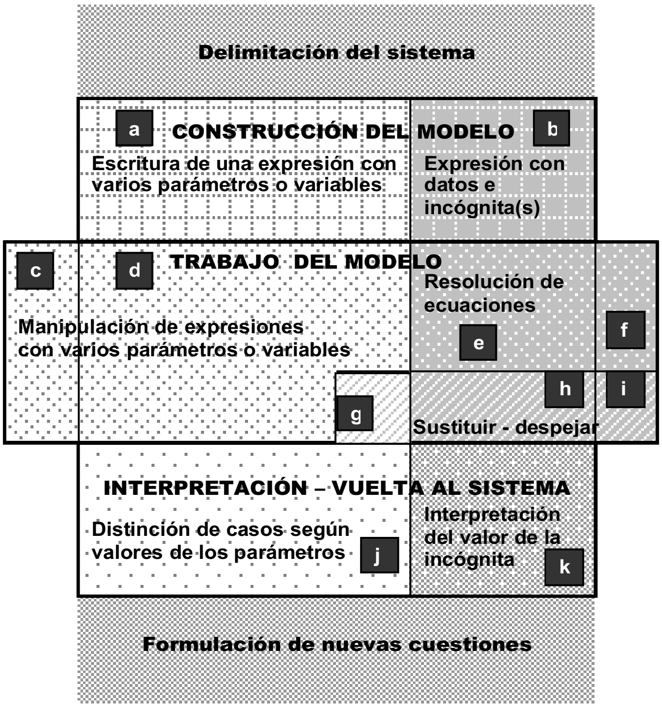


Fig. 1

En cada una de las casillas del cuerpo están representados los posibles subtipos de problemas algebraicos que podemos encontrar en la institución escolar. Seguidamente describimos cada uno de estos subtipos de problemas, así como los indicadores a los que hacen referencia.

(a) Construir un modelo algebraico a partir de un sistema de varias variables/parámetros (**MA1** y **MA8**).

(b) Construir un modelo algebraico a partir de un sistema de datos/incógnitas (**MA1** y **MA8**).

(c) Manipular expresiones algebraicas con varias variables sin modelización ni parámetros (**AG9**).

(d) Manipular expresiones algebraicas con distintas variables (**MA12**).

(e) Manipular expresiones algebraicas y resolver ecuaciones con datos/incógnitas (**MA12**).

(f) Resolución de ecuaciones sin modelización ni parámetros (**AG9**).

(g) Sustituir-Despejar en una fórmula con más de una variable/parámetro que viene dada de un trabajo de modelización (**MA12**).

(h) Sustituir-Despejar en modelizaciones dadas con datos e incógnitas (**MA12**).

(i) Sustituir-Despejar en fórmulas dadas con datos e incógnitas (**MA12**).

(j)–(k) Interpretación del modelo (**MA12**).

A continuación proponemos algunos ejemplos de problemas y técnicas de cada una de estas subclases:

(a) Construir un modelo algebraico a partir de un sistema de varias variables/parámetros.

> *El billete de tren para un jubilado cuesta J ptas y para un estudiante E ptas. Escribimos a continuación lo que costaría un viaje en tren de un grupo familiar formado por 3 chicos y sus 2 abuelos maternos:*
> - *El coste para los 2 abuelos es de 2J ptas.*
> - *El coste para los 3 chicos es de 3E ptas.*
> - *Escribe el coste para todo el grupo.*
>
> *(3º ESO McGraw-Hill. p. 53)*

Técnica τ: Traducción (expresar una cantidad dada) al lenguaje algebraico con interpretaciones personales: los abuelos son jubilados y los chicos son estudiantes.

(b) Construir un modelo algebraico a partir de un sistema de un datos/incógnitas.

> *Expresa el triple de un número aumentado en 5 unidades.*

Técnica τ: Traducción. Significado multiplicativo de “triple”; 3 veces; y significado aditivo de “aumentado”.

Queremos dejar constancia que, respecto a los *tipos de signos* utilizados para modelizar las distintas variables, los textos analizados establecen una clara distinción entre las letras usadas en los distintos ámbitos matemáticos:

—n— como generalización de un número (preferentemente natural)
—x— como incógnita o número desconocido

—p, q, a, b, etc.— como parámetro-variable.

De todas formas, nunca aparecen de forma explícita los criterios, normas o convenios que indicarían al alumno la manera de realizar por sí mismo la elección del tipo de símbolo más apropiado.

(c) Manipular expresiones algebraicas con varias variables sin modelización ni parámetros.

Calcula $(2x + 3yz)^2$
Desarrolla $(a + b)^3-13ab + (b^2 - 4a2b)^2$
Realiza las siguientes multiplicaciones: $(5x^4 + 3x^3 - 2x^2 - 3x)(2x^3 + 2x^2 + 1)$
(2º Ciclo ESO, Editex, p 93)

Técnicas τ_1: Aplicación directa de las fórmulas de un binomio al cuadrado, al cubo, etc.

τ_2: Aplicación de la propiedad distributiva del producto respecto de la suma y agrupación de monomios semejantes.

(d) Manipular expresiones algebraicas con distintas variables/parámetros que pueden provenir de un trabajo de modelización.

Desarrolla $(2x + 3y)^2$
Expresa el área de un rectángulo que tiene por lados x+4 e y+6 unidades.

Técnicas τ_1: Aplicación directa de las fórmulas de un binomio al cuadrado. Propiedad distributiva.

τ_2: Modelización dada $A = base \times altura$, sustitución de los datos en el modelo dado y aplicación de la propiedad distributiva.

(e) Manipular expresiones algebraicas y resolver ecuaciones con datos/incógnitas que pueden provenir de un trabajo de modelización.

Resuelve: $42 + x = 3(10 + x)$

Técnicas τ: Resolución de la ecuación de primer grado según las técnicas estudiadas:

— Tanteo
— Transponer términos y despejar, etc.

(f) Resolución de ecuaciones sin modelización ni parámetros.

Resolver: $\frac{5x-1}{2x} - \frac{2x+3}{7} = \frac{3}{x} + x$

$\frac{2x-1}{6} - 18x = \frac{13}{x} + 1$

(g) Sustituir-Despejar en una fórmula con más de una variable/parámetro, que viene dada de un trabajo de modelización.

Sea $A = \frac{a \cdot b}{2}$ *¿Cuánto vale b si A = 140 y a = 20?*
El área de un rombo es 140 m^2 *y la diagonal mayor mide 20 m ¿Cuánto medirá la diagonal menor?*

(2º ESO McGraw-Hill p. 81)

Técnicas τ_1: Modelización dada: $A = \frac{D \cdot d}{2}$

Sustitución de los datos: $140 = \frac{20 \cdot d}{2}$

Resolución de la ecuación de primer grado según las técnicas presentadas.

En un triángulo rectángulo la hipotenusa mide 20 m y el cateto b=12 m. Halla el valor del otro cateto.

(1º ESO McGraw-Hill p. 211)

Técnica τ_1: Modelización dada (Teorema de Pitágoras) $a^2 = b^2 + c^2$.

Sustituir datos: $202 = 122 + c^2$; $400 = 144 + c^2$;

τ_2: Despejar c^2: $400 - 144 = c^2$; $256 = c^2$,

τ_3: Operación inversa de la potencia $c = 16$ *m*

(h) Sustituir-Despejar en modelizaciones dadas con datos e incógnitas.

Comprueba que 2n+1 es impar para n = 3; n = 5; n = 2
Halla el valor de x para que $\frac{8}{12} = \frac{12}{x}$ *sea una proporción*

(2º ESO McGraw-Hill p. 102)

Técnicas: τ_1: Sustituir.

τ_2: Resolución de la ecuación de primer grado según las técnicas presentadas.

τ_3: Fórmula que directamente expresa el valor de los medios o de los extremos.

(i) Sustituir-Despejar en fórmulas dadas con datos e incógnitas.

Calcula el valor de $A = x^3 + 15x^2 - 18x+3$ *para* $x = 3$; $x = 0$; $x =6$

Técnicas τ: Sustituir.

(j) Interpretación de expresiones algebraicas con varias variables/parámetros.

¿Qué puede representar $x + 5 = 3(y + 5)$*?*

Técnica τ: Buscar casos similares resueltos anteriormente y tener en cuenta el significado de las operaciones que aparecen en la expresión. Por ejemplo que dentro de 5 años la edad del padre será el triple de la edad del hijo.

(k) Interpretar fórmulas con una variable/incógnita.

¿Qué representa $2(n + 1)$*?*

Técnica τ: Buscar casos similares resueltos anteriormente y tener en cuenta el significado de las operaciones que aparecen en la expresión.

Seleccionamos para contrastar la hipótesis propuesta el texto de la editorial: Editex 2º ciclo de ESO[9]. Esta editorial presenta en cada Unidad Didáctica, bajo el título "actividades desarrolladas", una serie de actividades resueltas con mucho detalle, y aunque los autores en la presentación del texto no hacen referencia al papel que deben jugar estas actividades en el proceso de estudio, interpretamos que quieren presentar los tipos de problemas y técnicas asociados a cada una de las Unidades Didácticas, que además corresponden esencialmente a la actividad del profesor o, por lo menos, no es responsabilidad del alumno su resolución. El resto de actividades propuestas en el texto las interpretamos como actividades del alumno, tanto en el aula como fuera de ella.

Establecemos a continuación un recuento de las frecuencias de las actividades realizadas por el profesor y el alumno. Designamos por **A** los problemas más completos de modelización en términos de variables/parámetros, es decir los que contienen los subtipos a-d/g-j.

[9] González, C.; Llorente,J. y Rúiz, MªJ. Nos hemos limitado, en este estudio inicial, a la consideración de un único texto que consideramos como un prototipo de manual de 2º ciclo de ESO. Sería interesante completar nuestros datos con el examen de los demás libros de texto de secundaria, o por lo menos con una muestra mínimamente representativa. Nuestros resultados deben pues interpretarse a la luz de esta limitación inicial.

Designamos por **B** los problemas completos de modelización en términos de datos/incógnitas, es decir los que contienen los subtipos b-e/h-k. Designamos por **H** los problemas que contienen los subtipos e/h-k en los que no aparece la etapa de construcción del modelo sino que se usan modelos dados de antemano.

El recuento de frecuencias absolutas y relativas nos da la siguiente tabla de datos:

		Alumno		Profesor		Alumno+Profesor	
	Subtipo	*Nº de tareas*	*% de tareas*	*Nº de tareas*	*% de tareas*	*Nº de tareas*	*% de tareas*
A = a-d/g-j	**A**	6	3%	4	10%	10	4%
Modelización	a-d	3	2%	0	0%	3	1%
con variables	a-g	4	2%	5	12%	9	4%
y parámetros	a-j	7	4%	2	5%	9	4%
	a	10	5%	4	10%	14	6%
B = b-e-h	**B**	19	10%	8	20%	27	12%
Mod. con datos	b-e	12	6%	0	0%	12	5%
e incógnitas	b-h	0	0%	1	2%	1	0%
	b	6	3%	0	0%	6	3%
H = e-h-k	**H**	5	3%	0	0%	5	2%
Modelo dado	h-e	3	2%	0	0%	3	1%
de antemano	h	21	11%	0	0%	21	9%
	d-j	0	0%	1	2%	1	0%
	g-j	1	1%	2	5%	3	1%
	g-e	6	3%	0	0%	6	3%
	d	7	4%	1	2%	8	4%
	e y f	5	3%	1	2%	6	3%
	g	36	19%	6	15%	42	19%
	i	2	1%	2	5%	4	2%
	j	12	6%	3	7%	15	7%
	c	21	11%	1	2%	22	10%
	TOTAL	**186**	**1**	**41**	**1**	**227**	**1**
	Subtipo aislado	120	65%	18	44%	138	61%

Los gráficos siguientes indican el porcentaje total de tareas correspondientes a cada subtipo de problema así como la diferencia de distribución según si consideramos las tareas asignadas al profesor o las tareas asignadas al alumno.

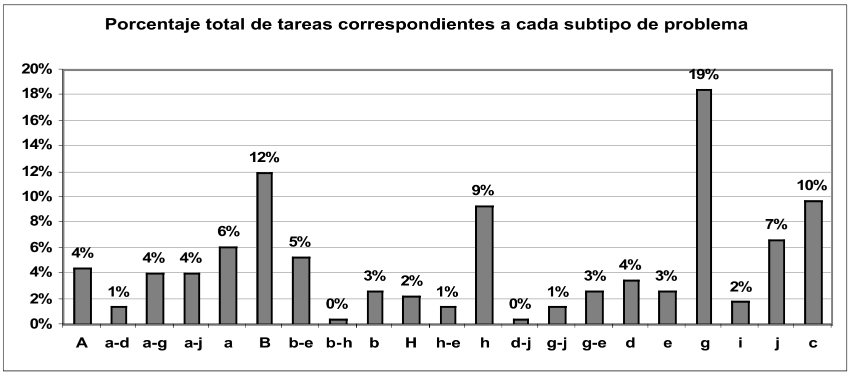


Fig. 2

Podemos observar en la *Fig. 2* que de un total de 227 tareas, a las de modelización completa del tipo A les corresponden un porcentaje muy bajo (4%). Este porcentaje aumenta considerablemente si restringimos la modelización a ecuaciones con una incógnita (12% tipo B). En general, sólo el 16% de las tareas son tareas completas de modelización, en las que se parte de un sistema, se construye un modelo, se manipula el modelo y se obtiene nuevos conocimientos acerca del sistema inicial.

La moda (g) con una frecuencia de 19%, de un total de 227, corresponde a la tarea de sustituir o despejar en fórmulas dadas de antemano y sin que se exija una interpretación del resultado. Se trata, en definitiva, de realizar un cálculo con números a partir de una fórmula con letras.

La distinción entre el *topos* del alumno y el *topos* del profesor permite matizar las observaciones anteriores (ver *Fig. 3):*

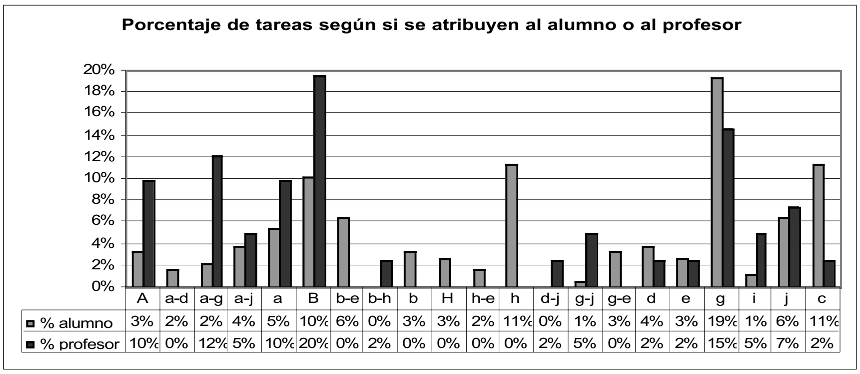


Fig. 3

En efecto, observamos que las tareas más completas de modelizaciones a las que hacíamos referencia anteriormente caen en gran medida bajo la responsabilidad del profesor: las tareas tipo A son un 10% (4 de un total de 41) de las tareas del profesor y sólo un 3% (6 de un total de186) de las tareas del alumno; mientras que las tareas tipo B representan un 20% (8 de un total de 41) de las tareas del profesor y un 10% (19 de un total de 186) de las del alumno. En cambio las tareas tipo H y similares (H, h-e, h) son claramente tareas que debe realizar exclusivamente el alumno y que representan un 16% (29 de un total de 186) de su volumen de trabajo. Así pues, parece que la poca actividad de modelización completa que propone el texto estudiado es una actividad que realiza esencialmente el profesor, mientras que se deja para el alumno las tareas parciales situadas en mayor parte en la etapa de manipulación de modelos ya construidos.

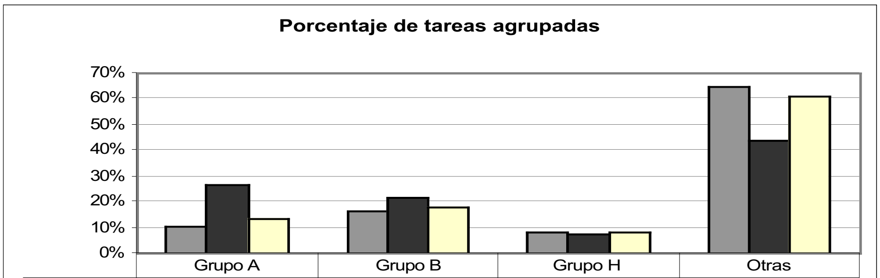
Hemos agrupado las tareas en 3 grandes bloques denominados **Grupo A, Grupo B** y **Grupo H** que contienen los subtipos siguientes:

- **Grupo A:** contiene A, a-d, a-g, a-j. Corresponde a las tareas más o menos completas de modelización o, por lo menos, de construcción y manipulación de modelos con variables y parámetros.
- **Grupo B:** contiene B, b-e, b-h. Corresponde a las tareas más o menos completas de modelización o, por lo menos, de construcción y manipulación de modelos con datos e incógnitas.

- **Grupo H:** contiene H, h-e, d-j, g-j, g-e. Corresponde a las tareas más o menos completas de manipulación de modelos dados de antemano y su posterior interpretación.

- **Otros:** contiene todas las demás tareas. Señalemos que se trata o bien de subtipos tareas de modelización aisladas o de tareas de cálculo formal sin vínculo con un posible sistema que modelizar.

La agrupación de los datos da la siguiente distribución de frecuencias *(Fig. 4):*



	Grupo A	Grupo B	Grupo H	Otras
% alumno	11%	17%	8%	65%
% profesor	27%	22%	7%	44%
% total	14%	18%	8%	61%

Fig. 4

Los datos anteriores deben interpretarse del modo siguiente: el 11% de las actividades del alumno (186) y el 27% de las del profesor (41) corresponden a tareas del grupo A, que a su vez representan el 14% del total de tareas (227).

Lo más importante a señalar es lo siguiente:

— El grupo de *tareas aisladas* es el que presenta una frecuencia mayor: el 65% de las tareas del alumno, el 44% de las del profesor y el 61% del total de tareas del libro.

— En los grupos A y B, que incluyen la construcción de modelos, domina la intervención del profesor.

— La baja frecuencia del grupo H se explica por el hecho de no incluir en él las tareas aisladas. De hecho, hay un porcentaje muy importante (más del 80%) de tareas de manipulación de modelos ya establecidos que son tareas aisladas en las que no se pide al alumno que interprete el resultado obtenido.

A modo de interpretación global podemos señalar que:

1. Aparecen pocas actividades completas de modelización (un 16% del total de tareas, 227).

2. Las tareas de modelización aparecen siempre como tipos de problemas atomizados, es decir, tareas en las que se realiza, de manera aislada, un determinado aspecto muy parcial del trabajo de modelización.

3. Cuando se trata de resolver un problema de modelización general, la actividad del alumno se desarrolla preferentemente en el grupo B (trabajo del modelo en forma de resolución de una ecuación), tareas que representan el 16% del total (186) del trabajo de alumno.

4. En el conjunto de tareas que debe realizar el alumno, un 42% (de un total de 186) corresponde al trabajo de *manipulación formal* de expresiones algebraicas.

5. La etapa final de la actividad de modelización que consiste en "volver al sistema inicial" para plantear nuevos problemas y realizar nuevas interpretaciones es prácticamente inexistente, lo que muestra que el poco trabajo de modelización realizado *no "se toma en serio" el estudio del sistema:* éste no aparece como el *fin* del estudio sino como el *medio* para dar sentido al trabajo de modelización.

6. En relación con lo anterior, *no aparecen cuestiones "de segundo orden"* respecto al sistema estudiado, es decir cuestiones relativas a la posibilidad misma del trabajo de modelización y a la descripción del alcance del modelo construido (condiciones de existencia de la incógnita, dependencia de la solución de los datos del problema, etc.).

7. La modelización más completa se da cuando *el sistema estudiado es numérico*, es decir cuando el álgebra aparece como instrumento de modelización y justificación de propiedades numéricas.

8. En algunos ámbitos de la matemática escolar —probabilidad, geometría afín, etc.— se construyen técnicas algebraicas que no se usan de forma sistemática, favoreciendo el empleo de otras técnicas rivales.

Por lo tanto podemos concluir que el análisis "estático" de la organización matemática escolar en torno a lo que la institución escolar considera álgebra elemental muestra una presencia muy débil de la modelización algebraica. Hay poco trabajo de construcción de modelos, existe mucha atomización de las tareas que el alumnos debe aprender a realizar, y se da una presencia muy débil de ciertas tareas relacionadas con la interpretación, validación y "explotación" de los modelos algebraicos utilizados. Es en este sentido que podemos afirmar que nuestro análisis empírico del libro de texto *Editex 2º de ESO* refuerza, a la vez que concreta, nuestra afirmación del *carácter prealgebraico de la actividad matemática en Secundaria*.

Un análisis dinámico, que tomase en cuenta el proceso de estudio del *álgebra escolar,* debería permitirnos detallar la *praxeología del profesor de matemáticas* y la organización didáctica en torno a este ámbito matemático. Es decir, debería permitirnos reconocer "un conjunto de tipos de problemas o tareas didácticas más o menos determinados, junto a un sistema de técnicas didácticas si no bien definidas, por lo menos describibles, y todo ello acompañado de un discurso tecnológico que estructuraría los distintos elementos de la organización en torno a unos fundamentos teóricos dados (Espinoza 1998). Como ya mencionaba Lorena Espinoza en su trabajo, existe un problema metodológico, hoy no resuelto, al intentar describir la praxeología del profesor de matemáticas, debido a que se trata de una praxeología *espontánea*, que solo puede percibirse "*en acto*" y para la que ninguna disciplina propone una descripción sistemática y operativa. Dicho de otro modo, el profesor utiliza tecnologías y teorías didácticas espontáneas que son insuficientes para teorizar o tematizar su actividad profesional, dado que responden a situaciones muy puntuales que dependen de circunstancias imprevistas.

No obstante, si consideramos la *tarea didáctica* que consiste en seleccionar las actividades "algebraicas" que el profesor propondrá en la secundaria obligatoria, la interpretación dominante que sobre el *álgebra escolar* tiene dicha institución será un elemento de la *tecnología didáctica* que determinará la selección de cierto tipo de actividades. La técnica mediante la cual se lleva a cabo dicha selección es una *técnica didáctica* totalmente naturalizada, ya que resulta de las consultas a los libros de texto o de la propia experiencia del docente.

3. EL MODELO DOMINANTE DEL *ÁLGEBRA ELEMENTAL* EN LA INSTITUCIÓN ESCOLAR ACTUAL

Hemos visto que tanto el discurso de la noosfera como las tareas matemáticas relativas al álgebra elemental propuestas por el diseño curricular y algunos textos de secundaria estaban mucho más próximos a una interpretación del álgebra como aritmética generalizada que como instrumento de modelización. Pero es bien sabido que ni el discurso de la noosfera ni los manuales agotan la complejidad de las prácticas matemáticas escolares, ni pueden ser los únicos indicadores de lo que "piensa" y "hace" la institución escolar en relación a la enseñanza y aprendizaje del álgebra elemental.

Nos falta por lo menos un indicador que, sin ser determinante, sí es esencial: nos referimos a los sujetos de la institución escolar que, aunque no sean enteramente responsables del tipo de prácticas matemáticas que allí se realizan, sí son sus principales actores. La base empírica de nuestra investigación debe pues ampliarse a las prácticas didácticas de los profesores y alumnos de la ESO actual, es decir a la manera cómo profesores y alumnos interpretan, construyen, practican y usan el álgebra elemental.

En nuestro caso, y asumiendo las limitaciones que ello comporta, nos hemos restringido al estudio del *discurso de los profesores sobre su práctica personal en la enseñanza del álgebra elemental*. Nuestra elección está doblemente motivada. Por un lado, la amplitud del tema —como hemos visto, el estudio del álgebra elemental se inicia en 2º de ESO y ya no desaparece de la práctica matemática escolar—, exigiría que la observación directa de clases abarcara un proceso didáctico muy largo en el tiempo y muy complejo en su dinámica (construcción del instrumento algebraico, utilización en los distintos bloques de contenido, etc.). Por otro lado, la evolución de la Teoría Antropológica de lo Didáctico no nos proponía todavía instrumentos adecuados para realizar la descripción detallada de las praxeologías u organizaciones didácticas mediante las cuales los profesores dirigen el estudio del álgebra y aquellas mediante las cuales los alumnos estudian el álgebra.

Nuestro propósito aquí se limitará pues a estudiar las siguientes cuestiones:

- ¿Cuál es la interpretación dominante del álgebra entre los profesores de secundaria y, más en general, en la institución escolar que ellos representan?
- ¿Cómo analizar la interpretación del álgebra que se desprende de la manera cómo los profesores enseñan el álgebra y que "domina" la institución escolar?

- ¿De qué manera la institución escolar presenta, describe, explica y justifica las prácticas docentes relativas al *álgebra elemental?*
- ¿Cuál es, en definitiva, la *tecnología didáctica* de la enseñanza secundaria actual en relación al álgebra?

Para dar respuesta a estas preguntas, y partiendo de la caracterización de los dos modelos presentados del *álgebra escolar*, elaboramos un primer cuestionario para profesores que recogía cada una de las particularidades de los modelos, así como el estudio a priori de las respuestas de los profesores en las dos posibles interpretaciones, **A G** (*aritmética generalizada)* y **MA** (instrumento de *modelización algebraica).*

Inicialmente presentamos al profesorado un modelo de encuesta que se componía, en primer lugar, de una breve *Introducción* en la que por una parte, se recordaban las orientaciones mínimas propuestas por el MEC (1989) respecto al *álgebra escolar* y, por otra, se informaba sobre los objetivos del cuestionario, objetivos centrados en recoger información sobre la interpretación institucional, o modelo dominante, del *álgebra escolar*. La finalidad de esta introducción era conseguir una actitud de colaboración, evitando que se sintieran examinados o cuestionados en su actividad profesional. Conocemos, por otra parte, la insatisfacción que sienten muchos docentes sobre cómo se está desarrollando el nuevo currículum escolar de la Secundaria Obligatoria y lo poco que se han tenido en cuenta sus opiniones y sugerencias, así como la escasez de tiempo y medios para el estudio de muchos temas imprescindibles para el seguimiento posterior de un bachillerato científico, etc. Por ello, justificamos nuestras actuaciones, con el deseo de que nuestras preguntas fueran bien recibidas y que las respuestas funcionen como un medio para que puedan describir sus propias prácticas y expresar sus opiniones sobre las condiciones de enseñanza del álgebra en la ESO. En definitiva, se trataba de realizar un estudio sobre el modelo dominante de *álgebra elemental* en el actual currículum de la ESO, y para ello, entre otras cosas, necesitamos conocer las opiniones que se forman los profesores a través de su experiencia docente, en el día a día de la clase. En ningún momento pretendemos valorar el trabajo del profesor, sino conocer mejor las necesidades y dificultades que plantea la enseñanza del *álgebra elemental* y las restricciones que sobre ella actúan.

3.1. Elaboración del cuestionario

De este modo, teniendo en cuenta los indicadores principales de cada una de las dos interpretaciones que consideramos, elaboramos un primer cuestionario, sencillo y abierto, que nos permitiera, por una parte, detectar la interpretación que los profesores en activo dan al *álgebra escolar* tal como ésta aparece en los actuales programas de la ESO y, por otra, averiguar si todas las preguntas formuladas discriminaban realmente las dos interpretaciones indicadas, es decir, tenían respuestas bien diferenciadas en cada una de dichas interpretaciones. Esta primera versión del cuestionario fue sometida al procedimiento de *validación* por un grupo de cuatro profesores en enero de 2000, que nos indicó que debíamos mejorar algunos enunciados del cuestionario, para que todos los profesores interpretaran y dieran el mismo sentido a las preguntas. En particular, modificamos algunas expresiones algebraicas de la pregunta 2 por otras más próximas a la institución de Secundaria Obligatoria, y reformulamos alguna otra pregunta que no discriminaba el tipo de interpretación que mostraban los profesores encuestados en el procedimiento de validación de la prueba. Finalmente, decidimos reducir la introducción, transformar el enunciado de algunas de las preguntas y dividir el cuestionario en dos partes: una primera con una mayoría de preguntas abiertas, y una segunda con un conjunto de 22 afirmaciones sobre las que hay que expresar el grado de conformidad.

En la primera parte del cuestionario, se plantean preguntas abiertas para que los profesores aporten información sobre su práctica docente y las prácticas curriculares más comunes en la ESO, teniendo en cuenta las directrices del DCB. Para organizar la información solicitada a los profesores hemos tenido en cuenta los cuatro aspectos señalados en el capítulo III sobre la caracterización de los modelos:

(a) La construcción o emergencia del álgebra, álgebra.

(b) Los conocimientos previos en los que se basa la construcción del álgebra escolar.

(c) Los elementos más significativos de las actividades asociadas al álgebra escolar.

(d) Las dificultades más destacadas en la realización de las actividades "algebraicas".

De esta primera parte, se asignarán a cada profesor dos puntuaciones o índices que valorarán su grado de proximidad a cada una de las interpretaciones anteriormente citadas.

La segunda parte del cuestionario presenta un conjunto de 22 enunciados que corresponden, de forma afirmativa o negativa, a los diferentes indicadores de las dos interpretaciones del *álgebra escolar*, junto con algunas ideas generales que circulan en la noosfera y que hemos encontrado explícitamente en textos escolares, libros o revistas dedicados a los profesores. De estos 22 enunciados, 13 son del tipo **AG** y 9 son del tipo **MA**, los presentamos intercalados de manera aleatoria y, según hemos indicado, no siempre la respuesta *"totalmente de acuerdo"* representa la aceptación de un indicador, puede ser su contrario *"nada de acuerdo"*, y en la respuesta de los profesores deberemos tenerlo en cuenta. Además, dado que no existe reciprocidad entre todas las características de cada una de las interpretaciones, aunque tampoco son completamente independientes, el grado de conformidad o disconformidad con una característica, por ejemplo del modelo **AG**, no implica que se produzca disconformidad o conformidad con otra característica del otro modelo, es decir, del modelo **MA**.

A diferencia de la primera parte, centrada en la descripción en las prácticas actuales de los profesores, esta segunda parte del cuestionario tiene como objetivo principal conocer sus opiniones y creencias sobre la naturaleza del *álgebra escolar,* y el papel que *debería jugar* en la ESO. Las respuestas a esta segunda parte —qué creo que es el álgebra y cómo creo que se debería enseñar— se podrán contrastar con las de la primera —cómo se enseña efectivamente el álgebra en la actual ESO.

Además de confirmar que la interpretación del álgebra como *aritmética generalizada* es dominante entre los profesores y, por extensión, en toda la institución escolar, el análisis de las respuestas a este cuestionario nos permitirá realizar un estudio exploratorio de la *"tecnología didáctica"* dominante en la institución escolar en torno a la enseñanza del álgebra en la ESO. Mostraremos de esta manera, aunque sólo se trate de un ejemplo, que las organizaciones matemáticas y didácticas están profundamente interrelacionadas.

La versión definitiva del cuestionario es la que presentamos a continuación:

EL ÁLGEBRA EN LA ESO

La implantación generalizada de la LOGSE ha comportado cambios importantes en las condiciones de enseñanza y aprendizaje del álgebra elemental en Secundaria. Desde la Universidad de Zaragoza, estamos realizando un estudio sobre la posición que ocupa actualmente el álgebra en el currículum de la ESO. Para ello, necesitamos conocer las opiniones que se forman los profesores a través de su experiencia docente, en el día a día de la clase. No pretendemos en ningún momento valorar el trabajo individual del profesor de matemáticas, sino conocer mejor la situación en la que se encuentra cuando se enfrenta a la enseñanza del álgebra.

1. Entre las siguientes expresiones, ¿cuál crees que caracteriza mejor lo que es una **ecuación**?

- ☐ Igualdad entre dos maneras diferentes de expresar una misma cantidad de magnitud.
- ☐ Igualdad que caracteriza uno o varios números desconocidos mediante propiedades aritméticas.
- ☐ Expresión simbólica que caracteriza una situación problemática, permitiendo un tratamiento automatizado de la búsqueda de soluciones.
- ☐ Igualdad entre expresiones con letras y números que se cumple para algunos valores de las incógnitas.

2. ¿Qué ***posibles significados*** se pueden dar, en una clase de ESO, a expresiones algebraicas tales como:

EXPRESIÓN	SIGNIFICADOS
$2x - 4$	
$mx + n$	
$(1 + \frac{x}{100})^2$	
$2\cdot(a + b)$	

3. ¿En qué **conocimientos previos** basas las actividades de iniciación al "álgebra"?

………………………………………………………………………………………
………………………………………………………………………………………
………………………………………………………………………………………

4. Ordena los contenidos de la ESO de **menor (1) a mayor (6) *grado de abstracción*:**
(1 = contenido *menos* abstracto)

	Aritmética
	Geometría
	Estadística
	Álgebra
	Funciones
	Probabilidad

5. Ordena los contenidos de la ESO de **menor (1) a mayor (5)** según el ***grado de utilización*** de conocimientos de álgebra: (1 = contenido en el que se utiliza *menos* álgebra)

	Aritmética
	Geometría
	Estadística
	Funciones
	Probabilidad

6. Indica marcando con una **X** el nivel de dificultad de los siguientes problemas para alumnos que acaban 3º de ESO:

	Muy Fácil	**Fácil**	*Difícil*	*Muy Difícil*
1. Resuelve: $9 - \frac{2}{3}(3 - x) = 1{,}5x + 2$	☐	☐	☐	☐
2. ¿El producto de dos números impares es siempre impar? Justifica la respuesta	☐	☐	☐	☐
3. Al aumentar en 1 m el lado de un cuadrado, su área aumenta en 15 m^2. ¿Cuánto medía el lado del cuadrado inicial?	☐	☐	☐	☐
4. Juan piensa un número, lo multiplica por 3, le añade 20 y el total lo divide por 5. El resultado final coincide con el número que había pensado Juan. ¿Cuál era ese número?	☐	☐	☐	☐
5. Desarrolla y simplifica: $3(a + 1)^2 - 2a(a + 3)$	☐	☐	☐	☐

7. De los cinco problemas anteriores, indica el que **elegirías con prioridad** para preguntar a alumnos de 3º de ESO en un **examen final** de álgebra:

☐

8. Supón que te encargan programar un **crédito variable de ampliación de álgebra** para 3º o 4º de ESO. ¿Qué contenidos y actividades considerarías prioritarios?

………………………………………………………………………………………
………………………..……………………………………………………
………………………………………………………………………………………
Ejemplo: ……………………………………………………………………………………
…………………………………………………………..………………………….

9. Indica marcando con una **X** tu grado de **acuerdo** o **desacuerdo** con las siguientes afirmaciones:

		Nada de acuerdo ⟷ Totalmente de acuerdo
1.	En la ESO, el álgebra se debe introducir como herramienta para describir y justificar propiedades matemáticas generales.	☐ ☐ ☐ ☐ ☐ ☐ ☐
2.	En la resolución de problemas verbales las ecuaciones se construyen como traducción del texto del enunciado.	☐ ☐ ☐ ☐ ☐ ☐ ☐
3.	En la ESO, el nivel de abstracción del álgebra es equiparable al de la aritmética o de la geometría.	☐ ☐ ☐ ☐ ☐ ☐ ☐
4.	La potencia del álgebra se basa en su capacidad para no diferenciar los datos conocidos de las incógnitas.	☐ ☐ ☐ ☐ ☐ ☐ ☐
5.	La resolución de ecuaciones es difícil porque hay que manipular letras que representan números desconocidos.	☐ ☐ ☐ ☐ ☐ ☐ ☐
6.	En la ESO, se debería usar el álgebra para unificar problemas de diferentes ámbitos, por ejemplo problemas comerciales, de física o de geometría que responden a un mismo tipo de ecuación.	☐ ☐ ☐ ☐ ☐ ☐ ☐
7.	Lo más difícil del álgebra es la manipulación simbólica y la resolución de ecuaciones	☐ ☐ ☐ ☐ ☐ ☐ ☐
8.	El álgebra escolar no debe estar demasiado vinculada al estudio de funciones elementales para evitar que los alumnos confundan la expresión de una función con la ecuación asociada.	☐ ☐ ☐ ☐ ☐ ☐ ☐
9.	Los alumnos de la ESO no saben utilizar el álgebra para resolver problemas de planteo porque se da poca importancia a las actividades de modelización.	☐ ☐ ☐ ☐ ☐ ☐ ☐
10.	En la ESO el álgebra se debe introducir como herramienta para resolver problemas aritméticos, geométricos, físicos, comerciales, etc.	☐ ☐ ☐ ☐ ☐ ☐ ☐
11.	En la ESO, la resolución de problemas de geometría con álgebra debería conducir a formular nuevas cuestiones que no se podían plantear en el ámbito estricto de la geometría pura o sintética.	☐ ☐ ☐ ☐ ☐ ☐ ☐
12.	La generalización de cálculos o la traducción de expresiones numérico-verbales es la mejor forma de introducir el álgebra	☐ ☐ ☐ ☐ ☐ ☐ ☐
13.	Para hacer álgebra, es más importante el dominio del cálculo aritmético que el de la geometría elemental.	☐ ☐ ☐ ☐ ☐ ☐ ☐
14.	Una de las principales dificultades del álgebra es que los alumnos deben atribuir a los signos =, +, -, ×, ÷ un significado diferente que en aritmética.	☐ ☐ ☐ ☐ ☐ ☐ ☐

15.	Lo difícil de los problemas de planteo en la ESO es que los alumnos no tienen suficientes conocimientos de la situación (geométrica, física, comercial, etc.) que presenta el enunciado.	☐ ☐ ☐ ☐ ☐ ☐ ☐
16.	La mejor manera de introducir el álgebra en la ESO es con “problemas inversos”, por ejemplo: “Hallar un precio neto conociendo el precio final y el porcentaje de IVA que se le aplica”.	☐ ☐ ☐ ☐ ☐ ☐ ☐
17.	Las expresiones algebraicas nacen de la necesidad de representar y manipular números desconocidos.	☐ ☐ ☐ ☐ ☐ ☐ ☐
18.	Para resolver problemas con álgebra se pueden ignorar completamente las magnitudes que aparecen en el problema.	☐ ☐ ☐ ☐ ☐ ☐ ☐
19.	En la ESO habría que proponer a los alumnos más problemas de planteo que sólo puedan resolverse con álgebra.	☐ ☐ ☐ ☐ ☐ ☐ ☐
20.	En la manipulación de expresiones algebraicas, es muy importante distinguir entre los datos conocidos y las incógnitas.	☐ ☐ ☐ ☐ ☐ ☐ ☐
21.	Las tareas más importantes en álgebra son: la traducción del lenguaje natural al simbólico, el cálculo algebraico y la resolución de ecuaciones.	☐ ☐ ☐ ☐ ☐ ☐ ☐
22.	No es bueno introducir el álgebra como una generalización de la aritmética.	☐ ☐ ☐ ☐ ☐ ☐ ☐

COMENTARIOS PERSONALES

……………………………………………………………………………………………………
……………………………………………………………………………………………………
……………………………………………………………………………………………………

DATOS PERSONALES

TITULACION y ESPECIALIDAD:

………………..………………..………………………………………….

EXPERIENCIA DOCENTE: EGB: …… años
BUP y COU: …… años
ESO y BACHILLERATO LOGSE años

COMUNIDAD AUTÓNOMA:

………………………………………………………………………………

MUCHAS GRACIAS POR TU COLABORACIÓN

3.2. Análisis a priori

Comenzamos por definir la matriz a priori correspondiente a la primera parte del cuestionario, es decir relativa a las 8 primeras preguntas. Elaboramos una matriz (10 x 30), en la fila 1 situamos los 29 indicadores de ambas interpretaciones; en la fila 2, los diferentes ámbitos de los indicadores y en las 8 filas restantes, los valores 1 o 0 según la presencia o no de un determinado indicador en la correspondiente pregunta. La primera columna corresponde a las 8 preguntas y las restantes se refieren a cada uno de los indicadores. A través de las columnas, los 1 o 0, indican si la pregunta da cuenta o no de un determinado indicador o característica.

Así por ejemplo, la fila 4 nos da información sobre la pregunta 2, los posibles significados de expresiones algebraicas, y puede dar cuenta tanto de los indicadores **AG1, AG3**, como del **MA1** o el **MA3**, según la respuesta del profesor y su interpretación del *álgebra escolar*, puesto que se trata de una cuestión abierta.

De forma análoga, cada columna representa un indicador de un tipo de interpretación, en un determinado ámbito, por lo tanto, la columna nos da información de las preguntas en las que podemos analizar el indicador, es decir, los 1 de las columnas representan en qué cuestiones podemos encontrar una característica concreta. Por ejemplo, el indicador **AG9**, puede manifestarse en las posibles respuestas a las preguntas 6, 7 y 8.

Dado que cada pregunta será valorada en uno de los modelos presentados, el análisis de estas ocho primeras preguntas nos permitirá asignar a cada profesor encuestado dos puntuaciones, una relativa a su grado de proximidad con los indicadores de la interpretación *aritmética generalizada* **(AG)** y otra relativa a su grado de proximidad con los indicadores del *instrumento de modelización algebraica* **(MA)**.

	AG1	AG2	AG3	AG4	AG5	AG6	AG7	AG8	AG9	AG10	AG11	AG12	AG13	MA1	MA2	MA3	MA4	MA5	MA6	MA7	MA8	MA9	MA10	MA11	MA12	MA13	MA14	MA15	MA16
	a	a	a	b	b	b	c	c	c	c	d	d	d	a	a	A	a	b	b	b	c	c	c	c	c	c	d	d	d
1	0	1	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0
2	1	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
3	0	0	0	1	1	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	1	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0
4	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
5	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0
6	1	1	0	0	0	0	0	0	1	1	0	0	0	0	1	0	0	1	0	0	1	0	0	0	1	1	0	0	1
7	1	1	0	0	0	0	0	0	1	1	0	0	0	0	1	0	0	1	0	0	1	0	0	0	1	1	0	0	1
8	0	0	0	0	0	0	1	1	1	0	1	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	1	1	1	1	1	1

Continuando con el análisis a priori de la segunda parte del cuestionario, definimos la matriz a priori de la pregunta 9 en la que colocamos igualmente las 22 cuestiones en la primera columna, con los diferentes indicadores, en la segunda columna, que corresponden a la respuesta *"Totalmente de acuerdo"* en todas las cuestiones, salvo en la 3 y en la 22 que las indicamos con 3* y 22* que corresponden a la respuesta *"Nada de acuerdo"*, de forma que mediante 1 y 0 en las columnas **AG** y **MA** conocemos el tipo de indicador a que hace referencia cada uno de los 22 enunciados, así como los diferentes ámbitos a los que alude la cuestión. La matriz correspondiente a la pregunta 9 es la que presentamos a continuación**:**

	Indicador	**AG**	**MA**	(a)	(b)	(c)	(d)
1	2	0	1	1	0	0	0
2	10	1	0	0	0	1	0
3*	13	1	0	0	0	0	1
4	10	0	1	0	0	1	0
5	11	1	0	0	0	0	1
6	4	0	1	1	0	0	0
7	11	1	0	0	0	0	1
8	3	1	0	1	0	0	0
9	14	0	1	0	0	0	1
10	1	0	1	1	0	0	0
11	3	0	1	1	0	0	0
12	1	1	0	1	0	0	0
13	4	1	0	0	1	0	0
14	12	1	0	0	0	0	1
15	15	0	1	0	0	0	1
16	5	0	1	0	1	0	0
17	2	1	0	1	0	0	0
18	1	1	0	0	1	0	0
19	14	0	1	0	0	1	0
20	7	1	0	0	0	1	0
21	9	1	0	0	0	1	0
22*	3	1	0	1	0	0	0

Dado que cada frase corresponde a uno de los indicadores que hemos establecido, el análisis nos permitirá asignar a cada profesor encuestado otras dos puntuaciones, una relativa a su grado de conformidad con los indicadores de la interpretación *aritmética generalizada* **(AG)** y otra relativa a su grado de conformidad con los indicadores del *instrumento de modelización algebraica* **(MA)**.

De la conjunción de las dos tablas obtenemos la tabla global siguiente:

INDICADORES

		AG1a	AG2a	AG3a	AG4b	AG5b	AG6b	AG7c	AG8c	AG9c	AG10c	AG11d	AG12d	AG13d	MA1a	MA2a	MA3a	MA4a	MA5b	MA6b	MA7b	MA8c	MA9c	MA10c	MA11c	MA12c	MA13c	MA14d	MA15d	MA16d	TOTAL
	Preg1		1						1						1								1								4
	Preg2	1		1											1		1														4
	Preg3				1	1	1												1	1	1										6
	Preg4													1																	1
	Preg5			1														1							1						3
	Preg6	1	1							1	1					1			1			1				1	1			1	10
	Preg7	1	1							1	1					1			1			1				1	1			1	10
	Preg8							1	1	1		1	1											1	1	1	1	1	1	1	12
Preg. 9	**OP1**															1															1
	OP2										1																				1
	OP3*													1																	1
	OP4																							1							1
	OP5											1																			1
	OP6																	1													1
	OP7											1																			1
	OP8			1																											1
	OP9																											1			1
	OP10																							1							1
	OP11																1														1
	OP12	1																													1
	OP13				1																										1
	OP14												1																		1
	OP15																												1		1
	OP16																		1												1
	OP17		1																												1
	OP18	1																													1
	OP19																											1			1
	OP20							1																							1
	OP21									1																					1
	OP22*			1																											1
	TOTAL Parte I	3	3	2	1	1	1	1	2	3	2	1	1	1	2	2	1	1	3	1	1	2	1	1	2	3	3	1	1	3	
	Total Parte II	2	1	2	1	0	0	1	0	1	1	2	1	1	0	1	1	1	1	0	0	0	0	2	0	0	0	2	1	0	
	TOTAL	**5**	**4**	**4**	**2**	**1**	**1**	**2**	**2**	**4**	**3**	**3**	**2**	**2**	**2**	**3**	**2**	**2**	**4**	**1**	**1**	**2**	**1**	**3**	**2**	**3**	**3**	**3**	**2**	**3**	

TOTAL AG = 35

TOTAL MA = 35

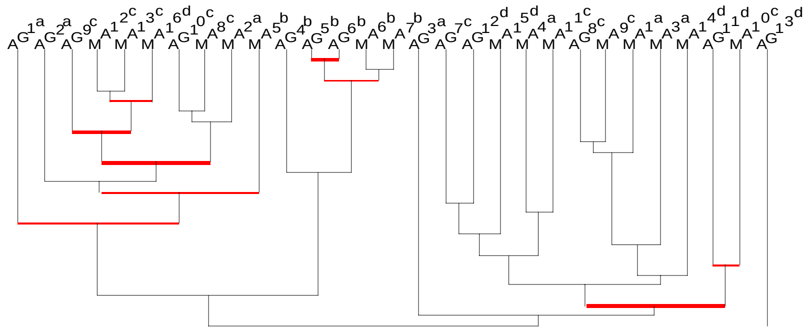
De esta forma, la fila 2 nos da información sobre la pregunta 2, los posibles significados de expresiones algebraicas, y puede dar cuenta tanto de los indicadores **AG1, AG3**, como del **MA1** o el **MA3**, según la respuesta del profesor y su interpretación del *álgebra escolar*, puesto que se trata de una cuestión abierta, en estos lugares de la tabla pondremos 1.

De forma análoga, cada columna representa un indicador de un tipo de interpretación, en un determinado ámbito, por lo tanto, la columna nos da información de las preguntas en las que podemos analizar el indicador, es decir, los 1 de las columnas representan en qué cuestiones podemos encontrar una característica concreta. Por ejemplo, el indicador **AG9**, puede manifestarse en las posibles respuestas a las preguntas 6, 7, 8 y 21.

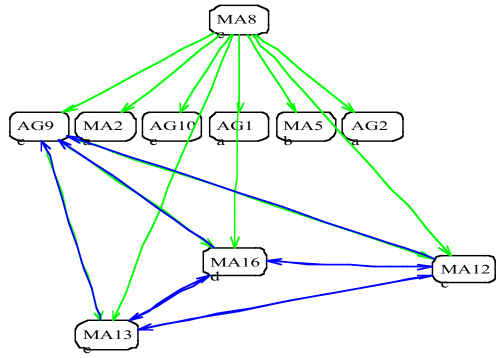
La tabla de datos nos muestra el equilibrio de la presencia de los indicadores en el cuestionario: 35 del tipo AG y 35 del tipo MA. La matriz de correlaciones muestra la igualdad (por otra parte observable) entre las columnas correspondientes a los indicadores MA12, MA13 y MA16, y corrobora las similitudes obtenidas a partir del programa *CHIC (Classification, Hiérarquique, Implicative y Cohésitive) (Fig. 5)*.

El análisis implicativo de CHIC *(Fig. 5)* muestra además que las preguntas que incluyen al indicador **MA8** también incorporan los indicadores **AG9,** etc.
Del mismo modo, los indicadores **MA12**, **MA13** y **MA16**, que siempre aparecen en las mismas preguntas, van acompañados del indicador **AG9**, aunque éste también aparece en otras preguntas sin los anteriores.

Creemos que, por todo lo anterior, nuestro cuestionario no resulta excesivamente desequilibrado ni parece priorizar un tipo de indicador ante otro.



Arbre des similarités : D:\Chic\A priori tot.csv



Graphe implicatif : D:\Chic\A priori   99 95 90 85

Fig. 5

Por otra parte, el análisis estadístico también nos permitirá confirmar la consistencia de nuestros modelos a través de los agrupamientos obtenidos, y con qué fuerza, debilidad o aislamiento se presentan las características que hemos definido en la descripción de cada uno de nuestros modelos. Es decir, el análisis conjunto de las respuestas a la pregunta 9 nos permitirá averiguar:

(1) Hasta qué punto hay redundancia o equivalencia entre nuestros indicadores relativos a la interpretación del álgebra como aritmética

generalizada (**AG**) y los relativos al álgebra como modelización (**MA**).

(2) Qué tipos de agrupaciones aparecen entre los indicadores y cómo se pueden interpretar.

En particular, a través del análisis de la pregunta nueve, nos gustaría hallar, de entre las 22 afirmaciones planteadas que corresponden en total a 18 indicadores (10 de AG y 8 de MA), si existe algún grupo destacado que nos permita, en cierto sentido, resumir los principales rasgos del modelo dominante en la institución docente.

Seguiremos nuestro análisis a priori analizando en cada pregunta qué tipo de respuestas confirman los diferentes rasgos de cada de las interpretaciones del modelo escolar y a continuación expondremos las respuestas que consideraremos mas significativas de un prototipo de individuo que interpreta el álgebra escolar según el modelo **AG** y otro prototipo de individuo que la interpreta según el modelo **MA**.

Las respuestas que confirman los rasgos de cada una de las interpretaciones son las siguientes:

1. Entre las siguientes expresiones, ¿cuál crees que caracteriza mejor lo que es una **ecuación**?

- ☐ Igualdad entre dos maneras diferentes de expresar una misma cantidad de magnitud.
- ☐ Igualdad que caracteriza uno o varios números desconocidos mediante propiedades aritméticas.
- ☐ Expresión simbólica que caracteriza una situación problemática, permitiendo un tratamiento automatizado de la búsqueda de soluciones.
- ☐ Igualdad entre expresiones con letras y números que se cumple para algunos valores de las incógnitas.

La elección de las respuestas 2 o 4 corresponden a la interpretación **AG**
La elección de las respuestas 1 o 3 corresponden a la interpretación **MA**

2. ¿Qué ***posibles significados*** se pueden dar, en una clase de ESO, a expresiones algebraicas tales como:

EXPRESIÓN	SIGNIFICADOS (indica más de uno)
$2x - 4$	
$mx + n$	
$(1 + \frac{x}{100})^2$	
$2(a + b)$	

Consideramos que las posibles respuestas a los distintos significados de una expresión algebraica tendrán mucha relación o serán los elementos de los sistemas matemáticos sobre los que se apoya la construcción del lenguaje algebraico:

- Números "aritmética"
- Cantidades "sistemas de distintos tipos": geométrico, financiero, etc.

Las respuestas del tipo:

— *Transformaciones aritméticas de los **número**s*

— *Programas de cálculo con **números***

corresponden a la interpretación del modelo **AG**, *en la que una palabra clave es **número.***

Las respuestas del tipo:

— *Objetos algebraicos que pueden representar **cantidades** de cualquier magnitud y que expresan la relación con una **cantidad** "base" que se designa "x"*

— *Estructuras numéricas*

— Descripción de algo: un porcentaje, el perímetro de un rectángulo, la ecuación de una recta, etc.

corresponden a la interpretación del modelo **MA**, *en la que una palabra clave es **cantidad** y **cantidad de magnitud***

3. ¿En qué **conocimientos previos** basas las actividades de iniciación al "álgebra" o al "lenguaje algebraico"?

Las respuestas que corresponden a la interpretación del modelo **AG** *son del tipo:*

— *Operaciones y propiedades de los números*

— *Resolución de problemas concretos*

— *En el lenguaje aritmético*

— *Es una continuación de lo que se hace con números pero utilizando letras*

Las respuestas que corresponden a la interpretación del modelo **MA** *son del tipo:*

— *Estructuras numéricas*

— *Criterios de igualdad (ya que suponen un conocimiento de las igualdades entre cantidades de magnitud)*

— *Resolución de problemas geométricos*

Es decir, *lo numérico* es lo prioritario y previo en la interpretación del modelo **AG**, mientras que la creación de herramientas matemáticas y el conocimiento de sistemas prealgebraicos es lo previo en la interpretación del modelo **MA**.

4. Ordena los contenidos de la ESO de **menor (1) a mayor (6)** ***grado de abstracción*****:** (1 = contenido *menos* abstracto) Aritmética Geometría Estadística Álgebra Funciones Probabilidad

Esta cuestión nos permitirá confirmar la interpretación institucional de *aritmética generalizada* si el *mayor grado* de abstracción se da al Álgebra y a las Funciones. Nos interesa confirmar que el Álgebra se sitúa en el 5º o 6º lugar.

5. Ordena los contenidos de la ESO de **menor (1) a mayor (5)** según el ***grado de utilización*** de conocimientos de álgebra: (1 = contenido en el que se utiliza *menos* álgebra) Aritmética Geometría Estadística Funciones Probabilidad

Si el *menor grado* de utilización se adjudica a la Aritmética, quedará reforzada la tesis de que el modelo institucional es de *aritmética generalizada* ya que puede interpretarse que en la organización escolar la construcción del número y de la aritmética es anterior y previa al álgebra, por lo tanto, "lo numérico" será el marco de referencia sobre el que se construirán los objetos algebraicos.

6. Indica marcando con una **X** el nivel de dificultad de los siguientes problemas para alumnos que acaban 3º de ESO:				
	Muy Fácil	*Fácil*	*Difícil*	*Muy Difícil*
1. Resuelve: $9 - 23\,(3 - x) = 1{,}5x + 2$	☐	☐	☐	☐
2. ¿El producto de dos números impares es siempre impar? Justifica la respuesta	☐	☐	☐	☐
3. Al aumentar en 1 m el lado de un cuadrado, su área aumenta en 15 m2. ¿Cuánto medía el lado del cuadrado inicial?	☐	☐	☐	☐
4. Juan piensa un número, lo multiplica por 3, le añade 20 y el total lo divide por 5. El resultado final coincide con el número que había pensado Juan. ¿Cuál era ese número?	☐	☐	☐	☐
5. Desarrolla y simplifica: $3(a + 1)2 - 2a(a + 3)$	☐	☐	☐	☐

La cuestión 6 es simplemente la presentación de unas tareas para dar respuesta a la cuestión 7. Aunque podemos interpretar que la elección de las respuestas *Fácil* y *Muy fácil* implican que son actividades trabajadas en clase, por lo cual los alumnos de 3º de ESO pueden considerarse competentes. Mientras que la elección *Difícil* o *Muy difícil* como respuesta a la dificultad de estas tareas en alumnos que finalizan 3º, no puede interpretarse como actividades que se hagan en clase, en todo caso, podrán interpretarse como actividades poco significativas en el estudio del *álgebra escolar,* que se practican poco o muy poco.

7. De los cinco problemas anteriores, indica el que **elegirías con prioridad** para preguntar a alumnos de 3º de ESO en un **examen final** de álgebra: ☐

La elección del primero, el cuarto o el quinto la consideraremos dentro de la interpretación del modelo **AG** *y la elección del segundo o el tercero en la interpretación del modelo* **MA**.

8. Supón que te encargan programar un **crédito variable de ampliación de álgebra** para 3º o 4º de ESO. ¿Qué contenidos y actividades considerarías prioritarios?

Esta cuestión es una pregunta abierta que nos permitirá evidenciar las tareas importantes desde el punto de vista del profesor, pero que actualmente *no* se trabajan en la ESO o que se trabajan poco. Consideraremos respuestas pertenecientes a la interpretación del modelo **AG** a los contenidos que consistan en manipular expresiones algebraicas o trabajo con ecuaciones, sistemas de ecuaciones y polinomios en sí mismos, y a las respuestas que formulen propuestas de ampliación a *talleres de problemas* que pueden resolverse mediante modelos algebraicos las consideraremos de la interpretación del modelo **MA**.

9. Indica marcando con una **X** tu grado de **acuerdo** o **desacuerdo** con las siguientes afirmaciones:

		Nada de acuerdo	Totalmente de acuerdo
1.	En la ESO, el álgebra se debe introducir como herramienta para describir y justificar propiedades matemáticas generales.		**MA2**
2.	En la resolución de problemas verbales las ecuaciones se construyen como traducción del texto del enunciado.		**AG10**
3.	En la ESO, el nivel de abstracción del álgebra es equiparable al de la aritmética o de la geometría.	**AG13**	
4.	La potencia del álgebra se basa en su capacidad para no diferenciar los datos conocidos de las incógnitas.		**MA10**
5.	La resolución de ecuaciones es difícil porque hay que manipular letras que representan números desconocidos.		**AG11**
6.	En la ESO, se debería usar el álgebra para unificar problemas de diferentes ámbitos, por ejemplo problemas comerciales, de física o de geometría que responden a un mismo tipo de ecuación.		**MA4**
7.	Lo más difícil del álgebra es la manipulación simbólica y la resolución de ecuaciones		**AG11**
8.	El álgebra escolar no debe estar demasiado vinculada al estudio de funciones elementales para evitar que los alumnos confundan la expresión de una función con la ecuación asociada.		**AG3**
9.	Los alumnos de la ESO no saben utilizar el álgebra para resolver problemas de planteo porque se da poca importancia a las actividades de modelización.		**MA14**
10.	En la ESO el álgebra se debe introducir como herramienta para resolver problemas aritméticos, geométricos, físicos, comerciales, etc.		**MA1**
11.	En la ESO, la resolución de problemas de geometría con álgebra debería conducir a formular nuevas cuestiones que no se podían plantear en el ámbito estricto de la geometría pura o sintética.		**MA3**
12.	La generalización de cálculos o la traducción de expresiones numérico-verbales es la mejor forma de introducir el álgebra		**AG1**

13.	Para hacer álgebra, es más importante el dominio del cálculo aritmético que el de la geometría elemental.	**AG4**
14.	Una de las principales dificultades del álgebra es que los alumnos deben atribuir a los signos =, +, -, ×, ÷ un significado diferente que en aritmética.	**AG12**
15.	Lo difícil de los problemas de planteo en la ESO es que los alumnos no tienen suficientes conocimientos de la situación (geométrica, física, comercial, etc.) que presenta el enunciado.	**MA15**
16.	La mejor manera de introducir el álgebra en la ESO es con "problemas inversos", por ejemplo: "Hallar un precio neto conociendo el precio final y el porcentaje de IVA que se le aplica".	**MA5**
17.	Las expresiones algebraicas nacen de la necesidad de representar y manipular números desconocidos.	**AG2**
18.	Para resolver problemas con álgebra se pueden ignorar completamente las magnitudes que aparecen en el problema.	**AG1**
19.	En la ESO habría que proponer a los alumnos más problemas de planteo que sólo puedan resolverse con álgebra.	**MA14**
20.	En la manipulación de expresiones algebraicas, es muy importante distinguir entre los datos conocidos y las incógnitas.	**AG7**
21.	Las tareas más importantes en álgebra son: la traducción del lenguaje natural al simbólico, el cálculo algebraico y la resolución de ecuaciones.	**AG9**
22.	No es bueno introducir el álgebra como una generalización de la aritmética.	**AG3**

Esta pregunta 9 recoge las opiniones de los profesores respecto de los diferentes indicadores de cada una de las interpretaciones.
Hemos elaborado 4 escalas. Las dos primeras, constituidas por las 8 primeras preguntas, asignarán a cada sujeto una puntuación **AGI** y otra **MAI** (que son complementarias). Los 22 items de la pregunta 9 se dividen en dos partes: 13 de estos items constituyen otra escala **AG** y los 9 restantes otra escala **MA**. Llamaremos **AGII** y **MAII** a las puntuaciones que obtiene cada sujeto en dichas escalas. Así, cada sujeto obtiene 4 puntuaciones: **AGI**, **MAI**, **AGII** y **MAII**.

En cada escala el análisis estadístico de la matriz de datos nos informará sobre la dependencia entre las preguntas, es decir, si es posible agrupar de forma significativa las preguntas que corresponden a la misma interpretación. Por ejemplo, si la máxima puntuación en las cuestiones Ci y Cj corresponden a la misma interpretación, si se cumple que todo individuo que obtiene la máxima puntuación en la Ci la obtiene también en la Cj querrá decir que los indicadores reflejados en Ci y Cj son estadísticamente equivalentes (matriz de correlación).

El tratamiento estadístico nos permitirá confirmar nuestra hipótesis respecto a la interpretación dominante en la institución escolar, refinarla o reformular una nueva interpretación.

3.3. Análisis de resultados

Como ya hemos expuesto, en enero de 2000 pasamos la primera versión del cuestionario a cuatro profesores, a través de sus dudas y sugerencias corregimos algunos de los enunciados para que fueran comprendidos mejor y discriminaran los dos tipos de respuestas esperadas. De febrero a junio de 2000, se distribuyeron 100 cuestionarios entre profesores de ESO de distintas autonomías, sin selección previa, esperando que por azar quedase reflejada la diversidad de formación del profesorado que inicia, en las aulas de Secundaria Obligatoria, el estudio del *álgebra escolar*. Recordamos que la legislación vigente contempla la posibilidad de que los profesores de primer ciclo de Secundaria sean maestros, no necesariamente especialistas en Ciencias, o licenciados, no necesariamente en matemáticas. Esta situación puede dar lugar a distintas interpretaciones de la normativa vigente recogida en el DCB de Secundaria Obligatoria al que hacemos referencia. Los modelos de encuestas fueron enviados a Institutos, en los que se disponía de un profesor de contacto, a Directores de Departamento y a profesores de centros concertados de Enseñanza Primaria y Secundaria Obligatoria.

Hemos contado con la respuestas de 66 profesores de ESO, procedentes de seis comunidades autónomas: Andalucía, Aragón, Castilla-León, Cataluña, Madrid y Valencia, de los cuales 51 son licenciados, 5 son maestros y 10 no contestan. De los 51 licenciados, 45 lo son en matemáticas y actualmente están impartiendo clase en 3º de ESO.

Antes de comenzar con el análisis de resultados, hemos intentado analizar y explicar la falta de respuesta del colectivo de profesores a nuestras demandas. Con cierta "ingenuidad" habíamos creído que las respuestas serían "evidentes" para los profesores, pero hemos constatado que esto no es así. Nuestro estudio del *álgebra escolar* lo podemos situar en un nivel regional, (que involucra niveles superiores de genericidad: el de la Disciplina Matemática y hasta el nivel escolar) y este enfoque a nivel regional (que permite hablar del *álgebra escolar* como un objeto de análisis sí mismo) no ha sido tratado por los profesores, ni en su formación inicial, ni en su práctica docente, ya que no existe *tecnología* *didáctica* a este nivel. El desarrollo de la formación del profesorado se mantiene a nivel local, los profesores se plantean cuestiones en el nivel local o puntual, es decir en el nivel de los temas concretos y de las cuestiones, por lo tanto es esperable que los profesores tengan problemas para responder al cuestionario. Por todo ello es muy de agradecer las aportaciones de los 70 profesores que han colaborado en este trabajo.

El tratamiento de los datos se ha realizado con Excel -análisis descriptivo- y con el programa estadístico *CHIC* -análisis de similaridades-. Se han cuantificado las respuestas de forma que se asigna el valor 1 a las que corresponden a la interpretación del modelo **MA** y el valor 7 a las respuestas que corresponden a la interpretación del modelo **AG**. En caso de duda o ambigüedad se asigna el valor 4. Hemos representado las cuestiones y las variables con la siguiente codificación:

Pregunta 1, ECUACIÓN: **EC**

Pregunta 2, SIGNIFICADOS: **SIG21**, para la primera las expresión;
SIG22, para la segunda expresión;
SIG23, para la tercera expresión y
SIG24 para la cuarta expresión.

Pregunta 3, CONOCIMIENTOS PREVIOS: **PREV3**.

Pregunta 4, GRADO DE ABSTRACCIÓN: **ABS4**.

Pregunta 5, GRADO DE UTILIZACIÓN: **UTI5**

Pregunta 6, DIFICULTAD: **DIF61**, para el primer problema;
DIF62, para el segundo problema;
DIF63, para el tercer problema;
DIF64, para el cuarto problema y
DIF65 para el quinto problema.

Pregunta 7, EXAMEN: **EXA7**.

Pregunta 8, AMPLIACIÓN: **AMP8**.

Para evitar dar más importancia a las preguntas de esta primera parte del cuestionario que se desdoblaban en distintos apartados, hemos definido nuevas variables a partir de las iniciales de la manera siguiente:

Variable	**Valores respuesta**	**Nueva codificación**	**Nueva variable**	**Valores**
EC1	1, 2, 3, 4	1 si 1 o 3, 7 si 2 o 4	**NEC1**	1 o 7
SIG2.1	Abierta	1, 4 o 7	**NSIG2**	**Moda**
SIG2.2	Abierta	1, 4 o 7		
SIG2.3	Abierta	1, 4 o 7		
SIG2.4	Abierta	1, 4 o 7		
PREV3	Abierta	1, 4 o 7		
ABS4	Cadena	Valor "álgebra" (posición 4ª)	**NABS4**	
UTI5	Cadena	Posición de "aritmética"	**NUTI5**	
DIF6.1	1, 2, 3, 4	7 si 1 o 2 en 6.1, 6.4, 6.5 1 si 1 o 2 en 6.2 y 6.3 4 = otros casos	**NDIF6 (nivel de dificultad)**	Moda de las preguntas 6.1-6.5
DIF6.2	1, 2, 3, 4			
DIF6.3	1, 2, 3, 4			
DIF6.4	1, 2, 3, 4			
DIF6.5	1, 2, 3, 4			
EXA7	1, 2, 3, 4, 5	0 si nulo 1 si 2 o 3 7 si 1, 4 o 5	**NEXA7**	0, 1, 7
AMP8	Abierta			
	%		**AGI**	% de 7 en **NEC1, NSIG2, PREV3, NDIF6, NEXA7**
	%		**MAI**	% de 1 en **NEC1, NSIG2, PREV3, NDIF6, NEXA7**
			AGII	% de 5, 6 o7 en las preguntas del tipo **AG**
			MAII	% de 5, 6 o7 en las preguntas del tipo **MA**

3.3.1. Resultados de la primera parte (preguntas 1 a 8)

Los resultados obtenidos de las respuestas de los 66 profesores encuestados correspondientes a cada una de las interpretaciones —**AG, MA**— en cada una de las anteriores variables son las presentadas en la tabla resumen siguiente:

	NEC1	NSIG2	PREV3	NABS4	NUTI5	NDIF6	NEXA7	MP8
MA	24,2%	21,2%	19,7%	—	—	0%	28,8%	**1,8%**
AG	**72,7%**	**59,1%**	**63,6%**	—	—	36,4%	**69,7%**	**1,8%**
Otros	3,1%	19,7%	16,7%	—	—	**63,6%**	1,5%	**6,3%**

De los 66 profesores sólo 5 se sitúan en una posición superior al 50% de respuestas que correspondan a la interpretación **MA**, frente a 36 de los 66 profesores que se localizan en una posición superior al 50% de respuestas que corresponden a la interpretación **AG**. Por otra parte, hemos de señalar que en la puntuación menor al 10% de la interpretación **MA**, se encuentran 26 de los 66 profesores encuestados, mientras que en la misma puntuación de la interpretación del modelo **AG** sólo se sitúan 2 sujetos de los 66 consultados.

3.3.2. Resultados de la segunda parte (pregunta 9)

Recordemos que la segunda parte del cuestionario está compuesta por una pregunta que propone 22 afirmaciones sobre alguna característica del *álgebra elemental*. Los profesores encuestados debían indicar su grado de conformidad con la afirmación según una escala que va del 1 (= nada de acuerdo) al 7 (= totalmente de acuerdo). La tabla de resultados siguiente:

	1	2	3*	4	5	6	7	8	9	10	11
	MA2	AG10	AG13	MA10	AG11	MA4	AG11	AG3	MA14	MA1	MA3
Moda	2,0	6,0	6,0	2,0	2,0	6,0	2,0	2,0	4,0	6,0	6,0
Media	3,6	5,7	5,3	3,5	3,5	5,2	3,6	3,2	4,3	5,6	4,4
Mediana	3,0	6,0	6,0	3,0	3,0	6,0	3,0	3,0	4,0	6,0	4,0
Desv.	1,67	1,43	1,58	1,84	1,96	1,54	1,66	1,88	1,73	1,41	1,61
Cuartil 1	2	5	5	2	2	4	2	2	3	5	3
Cuartil 3	5	7	6	5	5	6	5	5	6	7	6
RIC	3	2	1	3	3	2	3	3	3	2	3

	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22*
	AG1	AG4	AG12	MA15	MA5	AG2	AG1	MA14	AG7	AG9	AG3
Moda	6,0	6,0	2,0	2,0	2,0	6,0	2,0	4,0	6,0	6,0	2,0
Media	4,6	5,3	2,5	4,0	2,9	5,1	3,6	4,6	5,5	5,6	3,6
Mediana	5,0	6,0	2,0	4,0	2,0	6,0	3,0	5,0	6,0	6,0	4,0
Desv.	1,60	1,48	1,44	1,86	1,43	1,50	2,08	1,50	1,50	1,19	1,83
Cuartil 1	4	5	2	2	2	4	2	4	4	5	2
Cuartil 3	6	6	3	5,75	4	6	6	6	7	6	5
RIC	2	1	1	3,75	2	2	4	2	3	1	3

nos confirma que los indicadores más “fuertes” de la interpretación **AG**, corresponden a **AG1**, **AG2**, **AG4**, **AG7**, **AG9**, **AG10** y **AG13**, mientras que sólo hay dos indicadores “fuertes” entre los MA que corresponde al **MA1** y **MA4**, que hacen referencia explícita a la resolución de problemas.
El indicador más “débil” correspondiente a la interpretación **AG**, es el **AG12** y, el que corresponde a la interpretación **MA** es el **MA5**.

3.3.3. Análisis conjunto de las distintas variables

Dado que la muestra final (recordemos que sólo hemos dispuesto de 66 respuestas) no es demasiado representativa hemos realizado diferentes análisis, lo que ha permitido poner a prueba nuestro modelo:

1. *Análisis de proximidades en el sentido de I. C. Lerman*[10]

Este análisis, realizado con el programa *CHIC* requiere variables que tomen valores en el intervalo [0;1]. Para ello, hemos recodificado las respuestas de la pregunta 9 cambiando las respuestas en blanco por la media de los valores y transformado la escala de 1 – 7 en una escala de 0 – 1. El árbol de similaridades de las 22 preguntas *(Fig. 6)* permite obtener cinco grupos, tres de los cuales son significativos. Resumimos en la tabla siguiente los resultados obtenidos:

Grupo	*Ítems*	*Indicador*	*Característica común*
1 signifi- cativo	2 21 12 17	AG10 AG9 AG1 AG2	Todos son del tipo AG. Temas comunes: interpretación de expresiones, representación y traducción. *Este grupo volverá a aparecer en el análisis de componentes principales.*
2 signifi- cativo	1 3* 4 15 5 7	MA2 AG13 MA10 MA15 AG11 AG11	La agrupación mezcla indicadores AG con MA. Las afirmaciones 5 y 7 corresponden a la misma característica AG: la dificultad de asignar un significado a la incógnita. Los demás se refieren a propiedades generales del álgebra: herramienta para justificar, nivel de abstracción, potencia del álgebra, etc. Excepto 1 y 4, todas son del tipo (d): “Dificultades más destacadas en la realización de actividades algebraicas”
3 signifi- cativo	8 18 14 16	AG3 AG1 AG12 MA5	Mayoría de AG. El 18 y el 16 refieren a la actividad de resolución de problemas, el 8 y el 14 a la confusión en la interpretación de expresiones o símbolos.
4 no signifi- cativo	6 22* 9 10	MA4 AG3 MA14 MA1	Mayoría de MA. Temas comunes: la introducción del álgebra y la resolución de problemas
5 no signifi- cativo	11 20 13 19	MA3 AG7 AG4 MA3	Mitad AG y mitad MA. Las afirmaciones 11 y 19 corresponden al mismo indicador, las 20 y 13 hacen referencia al cálculo aritmético.

Del análisis de similaridades se desprende que, en dos casos, las agrupaciones distinguen un grupo de indicadores **AG** y otro de **MA**. El resto de agrupaciones no responde siempre a una relación visible. Veremos ahora que el primer grupo significativo (afirmaciones 2, 21, 12, 17) también aparece con el Análisis de Componentes Principales.

[10] Gras, 1996

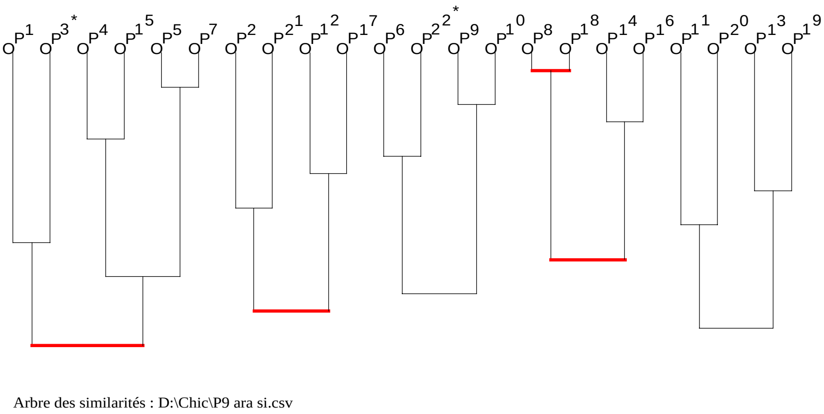


Fig. 6

2. *Análisis de componentes principales (con XLSTAT-Pro 5.1)*

Si consideramos los cuatro primeros ejes que se desprenden del análisis de componentes principales, obtenemos las agrupaciones que se pueden observar en la representación gráfica siguiente:

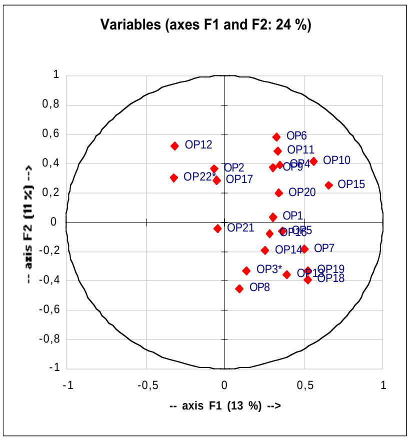


Fig. 7

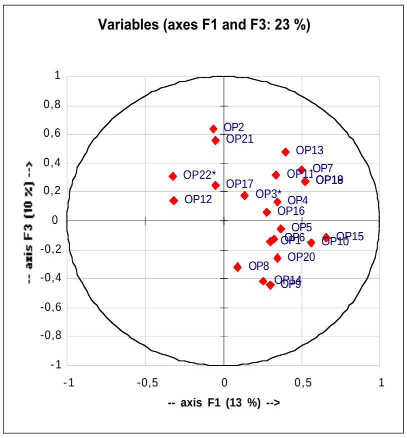


Fig.8

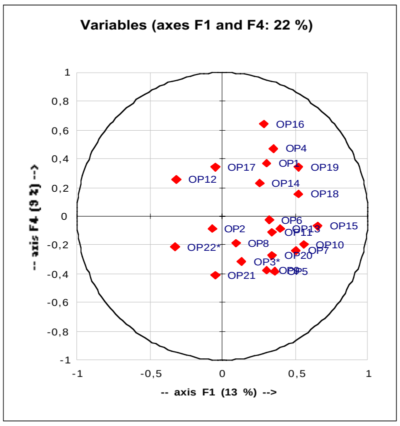


Fig. 9

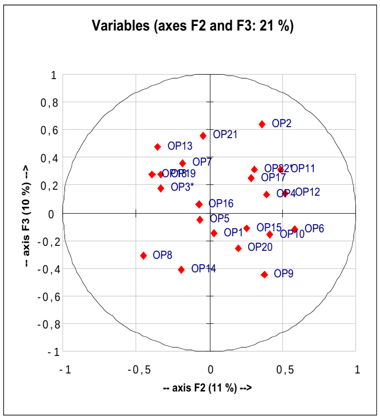


Fig.10

Factor loadings:				
	F1	**F2**	**F3**	**F4**
OP1	0,304	0,036	-0,145	0,368
OP2	-0,066	0,363	0,641	-0,088
OP3*	0,137	-0,332	0,176	-0,313
OP4	0,349	0,391	0,136	0,470
OP5	0,365	-0,064	-0,054	-0,389
OP6	0,325	0,584	-0,121	-0,027
OP7	0,501	-0,179	0,354	-0,240
OP8	0,091	-0,451	-0,316	-0,188
OP9	0,304	0,375	-0,445	-0,378
OP10	0,562	0,414	-0,154	-0,201
OP11	0,339	0,486	0,316	-0,115
OP12	-0,315	0,520	0,142	0,253
OP13	0,396	-0,355	0,474	-0,088
OP14	0,256	-0,192	-0,412	0,233
OP15	0,658	0,256	-0,114	-0,066
OP16	0,281	-0,074	0,059	0,639
OP17	-0,049	0,287	0,251	0,339
OP18	0,526	-0,388	0,278	0,151
OP19	0,522	-0,334	0,277	0,340
OP20	0,346	0,201	-0,260	-0,272
OP21	-0,047	-0,042	0,558	-0,411
OP22*	-0,320	0,307	0,312	-0,216

Contributions of the variables (%):				
	F1	**F2**	**F3**	**F4**
OP1	3,221	0,052	0,968	6,818
OP2	0,153	5,252	18,931	0,388
OP3*	0,651	4,386	1,432	4,930
OP4	4,237	6,093	0,848	11,122
OP5	4,647	0,162	0,136	7,618
OP6	3,691	13,578	0,677	0,038
OP7	8,746	1,272	5,770	2,894
OP8	0,291	8,112	4,594	1,790
OP9	3,227	5,595	9,147	7,197
OP10	11,008	6,843	1,092	2,029
OP11	3,997	9,425	4,601	0,662
OP12	3,462	10,750	0,933	3,229
OP13	5,476	5,013	10,348	0,387
OP14	2,289	1,471	7,815	2,745
OP15	15,083	2,609	0,605	0,222
OP16	2,755	0,219	0,161	20,575
OP17	0,084	3,289	2,894	5,788
OP18	9,643	6,011	3,559	1,143
OP19	9,513	4,441	3,535	5,841
OP20	4,182	1,605	3,118	3,717
OP21	0,077	0,071	14,336	8,510
OP22*	3,568	3,751	4,499	2,356

Nuestra interpretación de los factores obtenidos es la siguiente:

— El primer factor distingue muy claramente, con valores negativos, un grupo de afirmaciones **AG** correspondientes a la interpretación del álgebra como aritmética generalizada que ya había aparecido en el análisis de similaridades: 2 (**AG10**), 12 (**AG1**), 17 (**AG2**), 21 (**AG9**) y 22 (**AG3**). Este grupo recoge afirmaciones que se refieren todas al tema de la interpretación y traducción de expresiones (la importancia atribuida al álgebra como lenguaje), y se contrapone en particular a afirmaciones como la 10 o la 15 que vincula el álgebra con la resolución de problemas y con la modelización.

— El segundo factor podría sintetizar la utilidad o potencia atribuida al álgebra. Sitúa en un extremo las afirmaciones 6, 11 y 12 del tipo **MA** ("el álgebra permite relacionar problemas y plantear nuevas cuestiones") y en el otro extremo las afirmaciones del tipo **AG** nº 8, 13 y 18 que vinculan el álgebra con el cálculo aritmético.

— El tercer factor opone las afirmaciones 2, 13 y 21 (que refieren a la importancia del cálculo aritmético y al trabajo de traducción del lenguaje natural al algebraico) con las afirmaciones 8, 14 y 20 que refieren a las dificultades o confusiones de interpretación que comporta este trabajo.

— El cuarto factor distingue las afirmaciones 4 y 16 relativas a la potencia del álgebra en el trabajo de modelización con las afirmaciones 5 y 21, de carácter más numérico y vinculado con al cálculo aritmético (aunque también aparece en este último grupo la afirmación 9 sobre la poca importancia atribuida al trabajo de modelización en la ESO).

Resumimos en la tabla siguiente los tres grupos que se pueden distinguir más claramente en el primer gráfico (factor 1 / factor 2):

Factor	*Item s*	*Indicador*	*Característica común*
1 comp. 1 < 0 comp. 2 ≤ 0	2 12 17 21 22*	AG10 AG1 AG2 AG9 AG3	Todos son del tipo AG. Temas comunes: interpretación de expresiones, representación y traducción.
2 comp. 1 > 0 comp. 2 > 0	3* 5 7 8 13 14 16 18 19	AG13 AG11 AG11 AG3 AG4 AG12 MA5 AG1 MA3	Casi todos son AG. No sabemos encontrar ninguna característica común a todo el grupo, salvo el hecho que la mayoría tratan de *dificultades* del álgebra. Las afirmaciones 16 y 19, que corresponden a indicadores MA, hacen referencia los dos a los problemas de planteo que sólo pueden resolverse con álgebra. Podemos interpretar su posición en el grupo AG a partir del hecho que la mayoría de problemas de planteo en la ESO son problemas aritméticos.
3 comp. 1 > 0 comp. 2 < 0	1 4 6 9 10 11 15 20	MA2 MA10 MA4 MA14 MA1 MA3 MA15 AG7	Mayoría de MA. La afirmación 20 es la única “desplazada”: refiere a la importancia de distinguir datos conocidos de desconocidos. Parece pues que el eje F2 separa bastante las afirmaciones MA de las AG, pero sólo de aquellas AG que tienen componente F1 positiva.

3. *Las puntuaciones globales AGI, MAI, AGII y MAII*

Las variables **AGI**, **MAI**, **AGII** y **MAII** nos permiten asignar a cada profesor y para cada parte del cuestionario una puntuación o valor en función de su porcentaje de respuestas conformes a la interpretación **AG** o **MA**. Así, las variables **AGI** y **AGII** asigna una puntuación sobre el grado de conformidad a la interpretación **AG** en, respectivamente, la primera y segunda parte del cuestionario, mientras que las variables **MAI** y **MAII** asignan una puntuación sobre el grado de conformidad de cada profesor a la interpretación **MA** en la primera y segunda partes del cuestionario.

En la primera parte del cuestionario, los resultados obtenidos son los siguientes:

	MA I	**AG I**
Media:	0,1364	0,3788
Desviación:	0,1405	0,1595
Mediana:	0,1429	0,4286
Cuartil 1:	0,0000	0,2857
Cuartil 3:	0,2500	0,5714
RIC:	0,2500	0,2857

Fig. 11

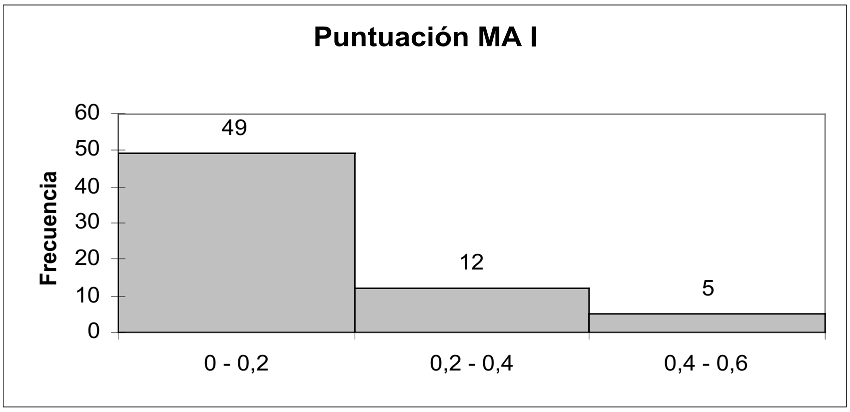


Fig.12

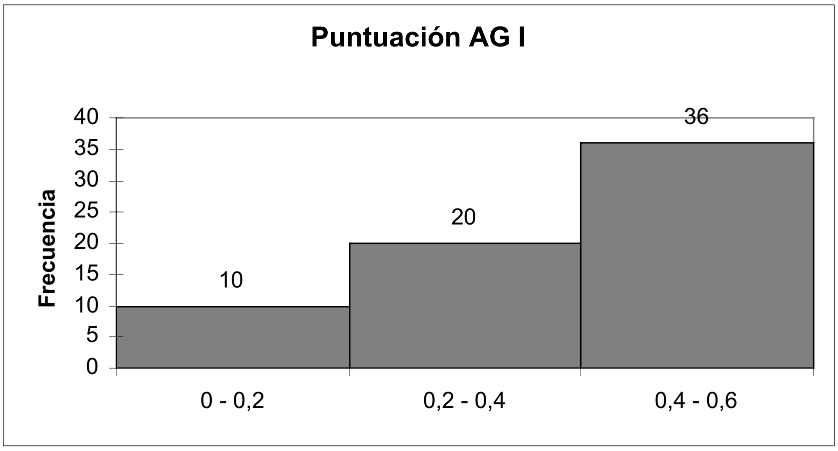


Fig. 13

No nos entretendremos aquí en un análisis detallado de las respuestas. Sólo constataremos que, en esta primera parte del cuestionario, el grado de conformidad de los profesores encuestados con la interpretación **AG** es mucho mayor que el grado de conformidad con la interpretación **MA**. Por ejemplo, el 25% de los profesores no dan ninguna respuesta acorde con la interpretación **MA**, y el 75% sólo dan un respuesta acorde con **MA** en una cuarta parte de las preguntas. En cambio, la mitad de los encuestados da una respuesta acorde con **AG** en más del 40% de las preguntas. En general las diferencias son significativas tanto si realizamos un test paramétrico de comparación de medias como si aplicamos un test no paramétrico de comparación de medianas.

Los datos relativos a las puntuaciones generales **MAII** y **AGII** de la segunda parte del cuestionario no son tan dispares, pero siguen presentando una diferencia significativa a favor de **AGII**:

	MA II	**AG II**
Media:	0,4596	0,5338
Desviación:	0,2238	0,1508
Mediana:	0,4444	0,5385
Cuartil 1:	0,3333	0,4615
Cuartil 3:	0,5556	0,6154
RIC:	0,2222	0,1538

Fig. 14

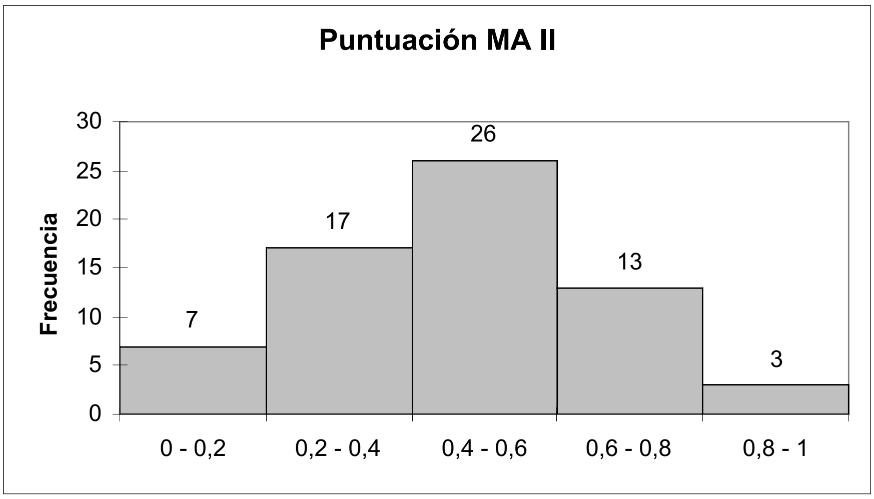


Fig. 15

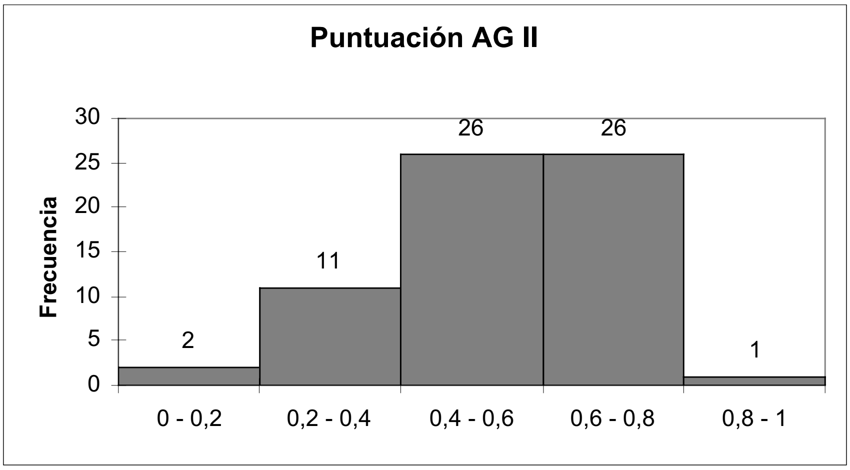


Fig. 16

Las puntuaciones relativas a **MAII** se distribuyen de manera bastante simétrica en torno a un valor un poco inferior al 0,5, de tal modo que el 50% de los profesores da su conformidad a las afirmaciones de tipo **MA** en menos del 44% de las veces. Por su parte, las puntuaciones **AGII** tienen una distribución asimétrica con valores sensiblemente más altos (el 41% esta conforme con más del 60% de las afirmaciones **AG** frente a un 24% conforme con más del 60% de las afirmaciones **MA**).

Queremos concluir este apartado destinado al análisis del cuestionario propuesto a los profesores con dos breves comentarios que nos permitirán matizar y completar la interpretación de los datos propuesta hasta aquí.

En primer lugar, debemos señalar que ningún análisis sobre las prácticas docentes más extendidas puede basarse exclusivamente en el discurso de los profesores, es decir en la manera cómo ellos describen verbalmente sus actuaciones en clase y sus interpretaciones de lo que se hace o debería hacer en un proceso de estudio sobre un tema de enseñanza determinado. El discurso de los profesores, como ingrediente visible de la tecnología didáctica dominante no agota en ningún caso una práctica que debemos situar más cerca de un “saber práctico” en el sentido de Bourdieu (1980) que de un “saber teórico o tecnológico”.

A tenor de los resultados obtenidos en las tres fases de nuestro trabajo empírico (análisis de documentos oficiales y de textos de la noosfera, análisis de las prácticas propuestas por un libro de texto y cuestionario a los profesores), creemos disponer de datos suficientes para avanzar la hipótesis de que la interpretación del álgebra como aritmética generalizada no sólo es la interpretación dominante en la enseñanza secundaria, sino que sin duda es mucho más dominante en la práctica docente de lo que las respuestas de los profesores al cuestionario dejan suponer. Sabemos en efecto que las restricciones institucionales con las que se encuentra el profesor en el día a día de las clases le obligan a menudo a tomar decisiones que no siempre corresponden a sus deseos o creencias. De ahí que haya aparecido en el cuestionario diferencias importantes entre las respuestas a la primera parte (más centrada en la práctica real del profesor) y las respuestas a la segunda parte (más centrada en lo que el profesor considera que es el álgebra y lo que él cree que se hace o debería hacer). De todos modos, sería interesante completar el trabajo empírico realizado hasta aquí con un estudio de las actividades de los alumnos, a partir por ejemplo de la recogida de material de clase y de algún cuestionario con diferentes tipos de tareas relacionadas a cada una de las dos interpretaciones del álgebra.

En lo que se refiere a la elaboración de nuestro cuestionario y la posterior interpretación de las respuestas de los profesores, queremos señalar, en segundo lugar, una variable que no habíamos considerado inicialmente y que nos ha aparecido en algunos momentos del análisis de datos. Nuestro cuestionario ha sido diseñado a partir de dos modelos epistemológicos (o dos “interpretaciones”) del álgebra escolar: el modelo del álgebra como aritmética generalizada y el del álgebra escolar como instrumento o proceso de modelización.

Ahora bien, sería ingenuo suponer que las interpretaciones específicas de tal o cual contenido escolar sean independientes las unas de las otras: en general presentan muchas características comunes que, bien articuladas, conforman lo que podemos designar como “el modelo general de la actividad matemática” dominante en la institución escolar. Dicho de otro modo, lo que los profesores o, más en general, lo que la institución escolar considera que es (o que debería ser) el álgebra en secundaria está muy condicionado (y, a su vez condiciona) lo que la misma institución considera que son (o que debería ser) las matemáticas. Si, siguiendo a Gascón (2001), mantenemos la hipótesis que el modelo epistemológico dominante actualmente en la enseñanza secundaria es el “modernismo” que interpreta la actividad matemática como una actividad de resolución de problemas en la que tiene especial importancia la fase de exploración de problemas abiertos, entonces creemos que muchas de las respuestas de los profesores al cuestionario no eran tanto indicios de su interpretación específica del álgebra escolar sino la especificación, en el caso del álgebra, de su interpretación general de las matemáticas.

Esta hipótesis todavía reforzaría más nuestra afirmación inicial de la interpretación dominante del álgebra como aritmética generalizada puesto que muchas de las respuestas que hemos interpretado como proviniendo del modelo **MA**, podrían responder en realidad al modelo dominante de las matemáticas como resolución de problemas y no al modelo del álgebra como proceso de modelización. Para tener en cuenta este "factor extraño", hubiéramos tenido que introducir en nuestro cuestionario algunos ítems que permitieran distinguir los niveles que Chevallard (2001) ha denominado de "codeterminación didáctica", para separar la información relativa al nivel de la disciplina (el que responde a la pregunta ¿Qué son las matemáticas y cómo se enseñan o deberían enseñar?) del nivel del ámbito o sector (¿Qué es el álgebra y cómo se enseña o debería enseñar?), e incluso del nivel temático (¿Qué es la resolución de problemas de planteo / las ecuaciones de primer grado / etc., cómo se enseñan o deberían enseñar?).

4. RESUMEN

En este capítulo hacemos una revisión detallada de los contenidos y orientaciones didácticas que los documentos oficiales, los libros de texto, los manuales para los profesores, revistas de divulgación, etc. hacen a los profesores y estudiantes respecto al *álgebra elemental*, *álgebra escolar* o *lenguaje algebraico*, lo que nos permite confirmar la ausencia de una organización matemática entorno al álgebra elemental. Hemos constatado, además, la ausencia del álgebra como instrumento de modelización y, por tanto, el carácter prealgebraico del currículum actual. Todos los datos empíricos que se obtienen de estos documentos sugieren claramente que el modelo institucional dominante del *álgebra escolar* se sitúa próximo al modelo de *aritmética generaliza*.

El análisis de los datos obtenidos a través de una encuesta formulada a los profesores de Secundaria Obligatoria nos confirma el modelo institucional y el grado de aceptación, por parte de los profesores, de dicho modelo.

CAPÍTULO V

FUNCIONES DIDÁCTICAS DEL PROCESO DE ALGEBRIZACIÓN

1. UNA POSIBLE ALGEBRIZACIÓN DEL *CÁLCULO ARITMÉTICO*: "LOS PROGRAMAS DE CÁLCULO"

Hemos descrito las características esenciales de la *modelización algebraica* y, a partir de ésta, algunos *indicadores del grado de algebrización* de una organización matemática. Antes de intentar explicar los efectos de la transposición didáctica sobre la reconstrucción escolar de una organización matemática concreta de la Enseñanza Secundaria Obligatoria (12-16 años), será necesario esquematizar algún proceso de algebrización "hipotético" de dichas organizaciones. En este capítulo utilizaremos dichos procesos de algebrización como referencia para *describir y explicar la reconstrucción escolar* efectiva (histórica) de algunas organizaciones matemáticas y para mostrar algunas de las funciones didácticas (esto es, de ayuda al estudio) del proceso de algebrización de dichas organizaciones matemáticas.

La necesidad de tomar en cuenta, junto a cada organización matemática relativamente prealgebraica, un modelo algebraico de la misma proviene de que, como veremos, la transposición didáctica introduce en la escuela elementos tanto de la organización prealgebraica inicial, como de posibles algebrizaciones de ésta. Además, los elementos introducidos aparecen mezclados y transformados de forma tal que la organización escolar resultante no siempre mantiene la coherencia ni la completitud relativa propias de las praxeologías matemáticas "teóricas" que la legitiman.

Existen unos temas que tradicionalmente se asocian con el álgebra escolar: ecuaciones, expresiones algebraicas, polinomios, etc. Hemos visto en el Capítulo IV que estas organizaciones matemáticas puntuales no se integran explícitamente en la ESO en una organización matemática local que articule y otorgue un sentido propio a ese conjunto de organizaciones matemáticas puntuales. Pero, ¿es posible construir en la ESO una organización matemática que corresponda a una algebrización del *cálculo aritmético*? ¿Cuál sería la razón de ser de esa organización matemática? ¿Sobre qué organización matemática prealgebraica habría que actuar como punto de partida del proceso de modelización? ¿Cuáles son las condiciones mínimas para la realización de este proceso de algebrización?

Veremos, a partir de un trabajo reciente (no publicado) de Yves Chevallard[11] una posible reconstrucción del *álgebra escolar*, considerada como una organización matemática, (como una *obra matemática)* en el sentido de la TAD. Es decir, se trata de la reconstrucción de una OM que integre y no contenga mucho más que las organizaciones del currículo escolar que clásicamente han sido consideradas como *álgebra*:

— Ecuaciones
— Inecuaciones
— Polinomios
— Sistemas de ecuaciones

Si nos preguntamos ¿a qué cuestiones responde esta obra matemática que es considerada como *álgebra* en la cultura escolar? debemos buscar la respuesta en el pasado. En el momento de su introducción en Occidente, en el siglo XVI, el álgebra fue considerada como una revolución, una ruptura, en las herramientas del trabajo matemático. El paso del tiempo, alrededor de cuatro siglos, ha trivializado esta obra, integrándola en el paisaje matemático más clásico, hasta el punto de que hoy es necesario un esfuerzo importante e indispensable para encontrar el sentido de la obra algebraica.

[11] Chevallard, Diccionario de didáctica de las matemáticas. ORGANIZACIONES MATEMATICAS: 4. Álgebra y algebrización (pendiente de publicación).

Como primer análisis, Chevallard explica la presentación que hace Félicien Girod en un texto de comienzos del siglo XX, el *Traté élémentaire d'algèbre théorique et practique à l'usage des Lycées, des Collèges et de tous les établissement d'instruction*, consiste en mostrar la aportación del álgebra elemental al arsenal de herramientas de pensamiento y de trabajo del matemático. Para ello, se apoya en un ejemplo paradigmático, el de la resolución de un problema clásico a través de la aritmética tradicional y a través del álgebra:

> Problema*: Encontrar tres números cuya suma sea 164, tales que el segundo supera al primero en 14 y que el tercero sea la suma de los dos primeros.*

En su forma "pura" la aritmética sólo usa palabras, con la exclusión de cualquier otro signo (+, -, x, x, y, z, etc.). En este marco la *"solución aritmética"* del problema propuesto toma la forma de un *discurso oral*, del cual la versión escrita sólo recurre a la notación cifrada de ciertas expresiones. Por ejemplo, no se escribe "catorce", se pone "14"; pero se pone "cuatro veces" y no "4 veces"; etc.

> Solución (aritmética)*: El segundo número es igual al primero aumentado en 14. El tercer número, siendo la suma de los otros dos, vale el primero más el primero aumentado en 14, es decir, dos veces el primero más 14. La suma 164 de los tres números se compone:*
>
> *Del primero número*
> *Del primero aumentado en 14*
> *De dos veces el primero más 14.*
>
> *o de cuatro veces el primero aumentado en 28. Si quitamos 28 de 164, el resto, 136, será el cuádruplo del primer número. Por lo tanto, el primer número es 34. De donde resulta que el segundo número es 34 más 14 o 48 y el tercero la suma de 34 y 48, es decir, 82.*

El "discurso" precedente resulta de la utilización de una técnica que el alumno debía aprender a dominar. Se destacará el papel funcional del *cálculo mental* en esta técnica oral ya que si se ponen las operaciones aritméticas necesarias:

$$164 - 28 = 136$$

$$\frac{136}{4} = 34$$

el discurso se interrumpiría en muchos momentos, con el riesgo de perder el hilo conductor del *"razonamiento"*.

El álgebra proporciona otros instrumentos de pensamiento y de acción. Reproducimos la *"solución por el álgebra"* con los comentarios que presenta el autor.

> Solución más sencilla con empleo de signos: *El método precedente es largo y penoso, se simplifica considerablemente cuando se emplean signos para indicar las operaciones a hacer. En efecto, si se separan por el signo + las cantidades añadidas entre ellas, por el signo = las que son iguales y si se representa el primer número por la letra x, se tiene inmediatamente*
>
> *primer número = x*
> *segundo número = x + 14*
> *Tercer número = x + x + 14*
>
> *y por tanto,*
>
> $$x + x + 14 + x + x + 14 = 164$$
>
> *o*
>
> $$4x + 28 = 164$$
>
> *Quitando 28 a los dos miembros de la igualdad se obtiene*
>
> $$4x = 136$$
>
> *de donde*
>
> $$x = \frac{136}{4} = 34\,;$$
> $$x + 14 = 48$$
> $$x + x + 14 = 82$$

Se encuentra aquí una técnica hoy día muy familiar, con sus grandes etapas:

- Elegir la incógnita principal, x
- Expresión de las otras incógnitas con la ayuda de x
- Escribir la ecuación
- Resolver la ecuación en x
- Calcular los valores de las otras incógnitas.

Es decir, una parte del proceso de *modelización matemática*: los estadios (ii) y (iii) que hemos denominado, respectivamente, la *construcción del modelo* y el *trabajo del modelo,* con los subestadios del trabajo manipulativo y la interpretación del trabajo y de los resultados obtenidos dentro del sistema modelizado. Observamos que se satisface el primer rasgo de las modelizaciones algebraicas (**RMA1**) ya que se modeliza cada una de las técnicas de la solución aritmética. Además, en lo que se refiere a los indicadores del grado de algebrización, observamos que se verifica **IGA1**, ya que el modelo permite la manipulación de la estructura global

de los problemas y el **IGA3**, ya que se produce una unificación y reducción de los tipos de problemas, técnicas y tecnologías.
Constatamos, además, que los signos considerados hoy en día como "aritméticos" (+, =, -, ÷, $\sqrt{\ }$, etc.) fueron durante mucho tiempo de uso exclusivo del álgebra.

Pero la aportación del álgebra no se detiene aquí: con la introducción de *parámetros*, es posible dar a la solución algebraica un alcance superior generalizando el problema y su solución. El autor lo presenta de la siguiente forma:

> Imperfección de la segunda solución–Empleo de letras en el enunciado del problema. *El segundo método, superior al primero, no es todavía perfecto. Proporciona, en efecto, un resultado aislado, en el que nada revela el origen; los datos han desaparecido en las reducciones sucesivas que se han hecho para obtener la incógnita y se está obligado a comenzar el mismo razonamiento para resolver otro problema análogo que sólo se diferencie en los números contenidos en el enunciado.*
>
> *si se representan dichos números por letras, los cálculos no pueden efectuarse y el resultado obtenido proporciona los pasos a seguir para resolver todos los problemas que sólo se diferencian por el valor numérico de los datos. El enunciado del problema toma entonces la forma general siguiente:*
> *Encontrar tres números cuya suma sea S, tales que el segundo supera al primero en a y que el tercero sea la suma de los dos primeros.*
> *Solución. - Si se representa el primer número por x, se tiene:*
>
> $$\text{primer número} = x$$
> $$\text{segundo número} = x + a$$
> $$\text{Tercer número} = x + x + a$$
>
> *y por tanto,*
>
> $$x + x + a + x + x + a = S$$
>
> *o*
>
> $$4x + 2a = S$$
>
> *Restando 2a a los dos miembros de la igualdad se obtiene*
>
> $$4x = S - 2a$$
>
> *y dividiendo por 4*
>
> $$x = \frac{S - 2a}{4}$$
>
> *De donde se ve que el primer número es igual a la cuarta parte del exceso de la suma con el doble de la diferencia de los dos primeros números.*

El hecho mayor que contrasta con el *álgebra elemental* enseñada hoy día, es el empleo de parámetros, es decir, de letras que representan números conocidos que se manipulan como si fueran desconocidos. El empleo de parámetros da al álgebra elemental su pleno alcance y pone de manifiesto la función de las expresiones algebraicas. El empleo sistemático de parámetros (y variables) es una condición esencial para que se cumplan los diferentes indicadores del grado de algebrización. Entre las citadas funciones de las expresiones algebraicas destacan:

(a) *Conservar una memoria de los datos y de los cálculos* efectuados (**IGA1**): en la fórmula que se obtiene en este problema

$$x = \frac{S-2a}{4}$$

se encuentran todos los datos del enunciado y se ve la manera en que la solución, x, depende de dichos datos, S y a. Si a aumenta x disminuye; mientras que si S y a aumentan y la diferencia $S\text{-}2a$ queda constante, x no varía.; etc. (**IGA4**).

(b) *Mostrar la estructura del problema*, «los cálculos no se pueden efectuar». El álgebra aparece pues como viniendo a romper los hábitos aritméticos por excelencia, los cuales llevan a querer «efectuar los cálculos»: el álgebra impide efectuarlos y muestra la estructura del problema (**IGA1**).

(c) *Construir programas de cálculo*. Este impedimento tiene una ventaja esencial: el resultado de un cálculo algebraico no es un número, como en aritmética, es un objeto matemático que «proporciona los pasos a seguir para resolver todos los problemas que sólo se diferencian por el valor numérico de sus datos» (**IGA2** y **IGA3**). En otros términos es un *programa de cálculo*, expresado por una fórmula,

$$x = \frac{S-2a}{4}$$

El autor comenta así el resultado al que ha llegado:

> Una expresión [i.e. $x = \frac{S-2a}{4}$] que indica la serie de operaciones a hacer con los datos para encontrar la incógnita es una *fórmula*. Contiene la solución de todos los problemas de la misma naturaleza.

También sorprende al lector de hoy día que aparezca una versión "retórica" de esta fórmula, enunciando lo que se designa generalmente por una *regla*:

<u>Regla</u>: *el primer número es igual a la cuarta parte del exceso de la suma y el doble de la diferencia de los dos primeros números.*

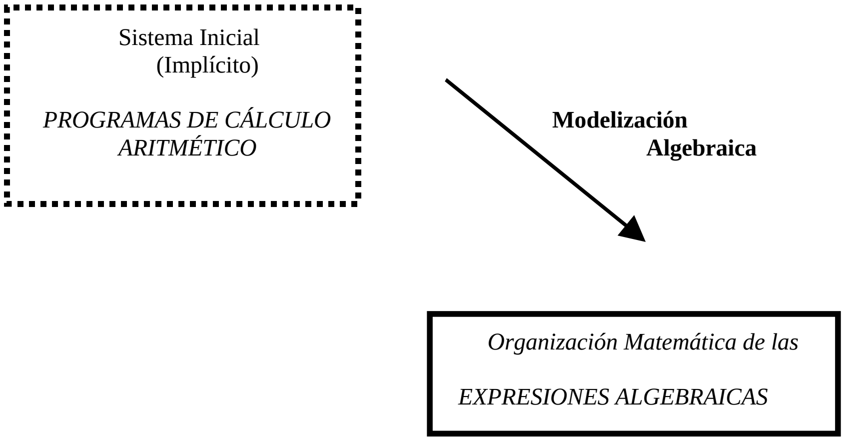
<u>*Fórmula:*</u> $x = \frac{S - 2a}{4}$

A través de esta presentación, en la que se analiza cómo un mismo problema es tratado con distintas herramientas, se encuentra la *razón de ser* (histórica) del *álgebra elemental*, se comprende que el álgebra representó una revolución en las herramientas matemáticas. De ahí la "definición de álgebra" que, según Chevallard, el autor toma del matemático francés Louis Poinsot (1777-1859):

> *El álgebra elemental no es otra cosa que una "aritmética generalizada", es decir, extendida de números particulares a números cualesquiera, y por consecuencia, de operaciones que se ejecutaban a operaciones que no hace falta más que indicar con signos; de forma que en esta primera especulación del espíritu (idea) se piensa menos en establecer el resultado de las operaciones sucesivas que en hacer la tabla y en descubrir las fórmulas para la solución de todos los problemas del mismo género.*

A partir de esta exposición, se pone de manifiesto que la primera razón de ser del *álgebra escolar* no es otra que la de constituir un nuevo instrumento para plantear, abordar y resolver problemas.

Según este estudio, una *expresión algebraica* es, simplemente, un objeto matemático que matematiza (o *modeliza algebraicamente)* un *programa de cálculo aritmético.* El esquema será:



La noción de *programa de cálculo* se construye actualmente en la Escuela Primaria (aunque sea implícitamente) y corresponde, concretamente, a la actividad que consiste en "hacer un cálculo", es decir, a operar con números de una manera determinada, según una cierta regla. Pero la noción así construida, que es un objeto de la práctica matemática, queda en este nivel de Primaria como un objeto implícito no matematizado. Aunque se puede "ejecutar un programa de cálculo", apenas sabremos proponer problemas a propósito de los *programas de cálculo*, enunciar los teoremas que les conciernen, etc. Ahora bien, esto es precisamente todo aquello que la *matematización algebraica* de la noción de *programa de cálculo* permitirá hacer y que hemos señalado con el rasgo **RMA2**.

La "definición" de la noción de *expresión algebraica* como formulación algebraica de un *programa de cálculo*, es decir, como expresión algebraica de un programa, es la que tienen todas las obras clásicas de *álgebra elemental*, aunque en ellas no apareciera la expresión *programa de cálculo.*

Posteriormente, Chevallard cita el texto *Algèbre* publicado en (1932) para la enseñanza primaria superior de (Bourlet y Desbrosses, 1932, p. 68):

> *Llamamos expresión algebraica al resultado de una o varias operaciones algebraicas todavía no efectuadas y representadas por los signos convencionales ya definidos.*

Los mismos autores definían a continuación una noción esencial en esta perspectiva, la de *valor numérico* de una expresión algebraica (Ibid., p. 69):

> *Llamamos valor numérico de una expresión algebraica, para ciertos valores atribuidos a las letras que allí figuran, al número que se obtiene sustituyendo las letras por los números y efectuando los cálculos indicados.*

Necesitan la relación entre *fórmula*, *expresión algebraica* y *valor numérico* de una expresión algebraica (Ibid)

> *Cada vez que se tiene una fórmula, el segundo miembro es una expresión algebraica y para calcular el valor de la cantidad proporcionada por dicha fórmula se calcula el valor numérico de la expresión para ciertos valores de las letras.*

En una obra posterior, l'*Enciclopedie autodidactique Quillet* (1958), los autores de la parte del Algèbre escribieron de forma análoga:

> Definición. — *Llamamos expresión algebraica a un conjunto de letras y números unidos entre ellos por signos que indican una sucesión de operaciones que hay que efectuar.*
>
> …
>
> Valor numérico de una expresión algebraica. *Sea la expresión 3ab. Conociendo los valores particulares a = 2, b = 5, se puede calcular la expresión 3ab sustituyendo las letras por sus valores.*
> *Se tiene 3ab = 3 x 2 x 5 = 30. El valor numérico de 3ab es 30.*

Notaremos que en este contexto matemático el tipo de tareas que consiste en determinar el valor numérico de una expresión algebraica dada para un conjunto de valores dado, ocupaba un lugar importante, al menos para los principiantes.

Desde este punto de vista, en la organización matemática de los *programas de cálculo* (aritmética) la actividad matemática consiste en efectuar cálculos, mientras que la OM de las *expresiones algebraica* (que constituye un modelo algebraico de la primera) va a enriquecer considerablemente las herramientas del trabajo de calcular, permitiendo estudiar los programas de cálculo, es decir, se cumple el **RMA2**, ya que se modelizan íntegramente todos los componentes de la organización matemática que hace el papel de sistema a modelizar: los programas de cálculo.

Así en el ejemplo, el programa de cálculo que aparecía en el problema introductorio elegido por F. Girod en su *Traité élémentaire*:

— El primero de los tres números se obtiene ejecutando el programa de cálculo C_1 siguiente:

Datos: *S* y *a*
Hacer: Tomar la cuarta parte del exceso del primer dato (*S*) con respecto al doble del segundo *(a)*

Llamamos C_1 (S,a) al resultado de la ejecución de C_1 aplicado a *S* y *a*.

Por ejemplo: C_1 (12,1) = 2,5

Hemos mantenido voluntariamente, en la formulación precedente, el vocabulario de la época. La formulación más actual será:

Hacer: Multiplicar *a* por 2, restar el número encontrado a *S*, y dividir el resultado por 4

que está influenciada subrepticiamente por la formulación algebraica de la regla precedente, o sea, la fórmula $\frac{S-2a}{4}$ que, más o menos, calca.

Si consideremos ahora el programa de cálculo siguiente:

Programa de cálculo C_0:
Datos: *x* e *y*.
Hacer: Al primer dato sumar el segundo.

Entonces, junto con C_0, el programa C_1 permite escribir los programas de cálculo teniendo, a partir de *S* y *a*, el segundo y tercer número buscado:

$$x = C_1\ (S,a),$$

$$y = C_0\ (x,a) = C_0\ (C_1\ (S,a),a)$$

$$z = C_0\ (x,y) = C_0\ (C_1\ (S,a),\ C_0\ (C_1\ (S,a),\ a\ ))).$$

La aportación fundamental de modelización algebraica de la noción de programa de cálculo consiste en que cuando dichos programas de cálculo expresados en palabras (de forma "retórica", bajo forma de reglas) se vuelven muy pesados, el cálculo algebraico va a permitir modificar y simplificar su formulación[12].

[12] Esta es una característica que comparten las técnicas (algebraicas) que se obtienen como resultado de la modelización algebraica de técnicas “prealgebraicas”: son más manejables, flexibles, económicas y eficaces.

Así, en el ejemplo precedente:

$$y = C_0\,(x,a) = x + a = \frac{S-2a}{4} + a = \frac{S+2a}{4}$$

$$z = C_0\,(x,y) = x + y = \frac{S-2a}{4} + \frac{S+2a}{4} = \frac{S}{2}$$

El hecho de que el tercer número buscado, *z*, sea igual a *S/2*, no era nada evidente en la expresión formal inicial, $z = C_0\,(C_1(S,a),\ C_0\,(C_1\,(S,a),\ a\,)))$, y no lo sería en la expresión retórica de este programa.

La primera *función didáctica de la algebrización de los programas de cálculo*, del cálculo aritmético es, la de dar sentido al *álgebra escolar* tal como aparece actualmente en la enseñanza obligatoria y que hemos caracterizado como *aritmética generalizada*. En particular, la algebrización de los programas de cálculo daría sentido al *cálculo algebraico* o manipulaciones de expresiones algebraicas, es decir, a los temas clásicos que aparecen en el currículo de Secundaria bajo la denominación de Álgebra.

Pero, además, la algebrización de los programas de cálculo aritmético tiene una función didáctica complementaria de la anterior. Consiste en ampliar, de forma controlada los tipos de problemas "algebraicos" que aparecen en el currículum actual de la ESO. Entre los nuevos tipos de problemas "algebraicos" destacan los siguientes:

1— Un primer gran tipo de problemas es el de pasar de la formulación retórica ("en palabras" o bajo forma de regla) de un programa de cálculo a la formulación simbólica, es decir, algebraica, de ese mismo programa de cálculo (traducción).

La resolución de este tipo de problemas está motivada por otro tipo fundamental de problemas que es el siguiente:

2— Dados dos programas de cálculo C y C' reconocer si C y C' son equivalentes o no, es decir, si $C(x,y,\ldots) = C'(x,y,\ldots)$ para todos los valores de $x,y,\ldots$

Es precisamente este tipo de problemas el que justifica la matematización de la noción retórica de *regla* mediante la noción algebraica de *fórmula* y el que conducirá a desarrollar el cálculo algebraico.

3— Otro tipo de problemas, aunque relativamente raro, es que se tengan que comparar dos programas de cálculo C y C' dados a priori. Ejecutando estos programas de cálculo se puede verificar que C(x,y) = C'(x,y) para un conjunto finito de pares (x,y). Pero para estar seguro que siempre será así, tendremos que *expresar algebraicamente* C y C', y después demostrar que las expresiones algebraicas correspondientes son equivalentes, esto exige la construcción de un sistema de "leyes" del cálculo algebraico.

4— Podemos formular otro tipo de problemas como sigue: dado un programa de cálculo C, determinar otro programa de cálculo C', equivalente a C, pero más "simple" que C (respecto a cierto criterio de "simplicidad" que dependerá de los medios de cálculo de los que se dispone y, también, de los fines para los que se requiera "simplificar" el programa de cálculo).

Señalemos, por último, una tercera función didáctica de la algebrización de los programas de cálculo aritmético. Se trata de una completación relativa del bloque tecnológico-teórico que en la OM de los programas de cálculo era prácticamente invisible. En efecto, si la noción de *expresión algebraica* es introducida a través de la matematización de la noción de programa de cálculo (aritmético), algunas de las dificultades tradicionales tendrán otro sentido o desaparecerán, es decir, podremos dar respuesta a problemas didácticos que en el marco de la aritmética generalizada no tienen solución. Por ejemplo:

— La cuestión "¿Qué vale $x + 3$?" se queda desprovista de sentido: la expresión $x + 3$ es la expresión algebraica de un programa de cálculo (al número dado añadirle 3) y no tiene que "valer" ninguna cosa. En la OM algebrizada podemos, por tanto, describir y justificar la existencia de objetos matemáticos que no eran fácilmente justificables en la OM de los programas de cálculo.

— En cambio, se puede preguntar con toda legitimidad, por ejemplo, si $x + 3$ y $3x$, que "son parecidas", corresponden a expresiones formalmente distintas de un mismo programa de cálculo.

— Además de tener sentido la cuestión anterior, se dispone de una técnica que permite contrastarla. Para $x = 1$ el programa $x + 3$ da 4 y el $3x$ da 3; por lo tanto $x + 3 \neq 3x$.

— Observamos, por ejemplo, que las expresiones $x + 3$ y $x - 2$, que no definen el mismo programa de cálculo en Z, son sin embargo equivalentes en Z / 5Z, donde se tiene que $x + 3 \equiv x - 2$. En otras palabras, dos programas de cálculo no son equivalentes en términos absolutos, su equivalencia depende del sistema de números que consideremos.

Tenemos, en resumen, que la *modelización algebraica* de los programas *cálculo aritmético* permite la obtención de una organización matemática (minimal) pero relativamente “completa”, ya que incluye los elementos tecnológicos mínimos para justificar las técnicas, y que contiene al *álgebra elemental* de la Secundaria Obligatoria que hemos caracterizado como *aritmética generalizada*. Pero, además, la organización así obtenida es interpretable fácilmente por la cultura escolar ya que no contiene mucho más que el cálculo algebraico elemental, el cual existe de forma dispersa, aunque sin “sentido”, en la matemática escolar actual.

Este redescubrimiento de los *programas de cálculo*, y de su potencial proceso de algebrización, que ha permitido reinterpretar el *cálculo algebraico elemental*, podría dar lugar a una actividad matemática algebrizada en la ESO y a la vez, dar “sentido” al *álgebra escolar*.

2. EL PASO DE *LO PUNTUAL* A *LO LOCAL*: DIVISIBILIDAD EN N Y ECUACIONES DIOFÁNTICAS

Partimos de la *organización matemática escolar en torno a la divisibilidad* tal como ésta aparece en la ESO. Dicha organización, que posteriormente describiremos, jugará el papel de *sistema a modelizar*. La *modelización algebraica* tendrá origen, como suele ser habitual, en la necesidad de describir, explicar y justificar los elementos que componen dicha organización empírica escolar:

— ¿Qué es un problema de divisibilidad?

— ¿Cómo se resuelve?

— ¿Por qué se hace de esta forma?

— ¿Cuál es el alcance de esta manera de proceder?

— ¿Qué relación hay entre los diferentes tipos de problemas de divisibilidad?

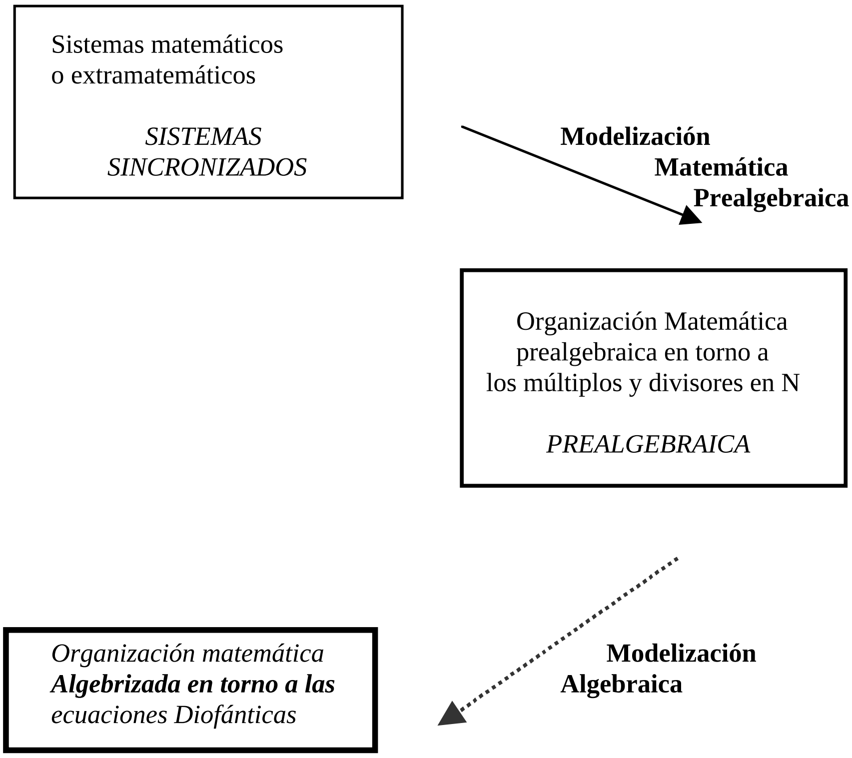
— ¿Cómo se interpretan y cómo se justifican dichas técnicas?

— ¿Cómo podrían integrarse (algunos de) los tipos de problemas que aparecen aislados en la organización escolar alrededor de la divisibilidad?

— ¿Podrían aparecer otros problemas de divisibilidad diferentes de los que aparecen?

En definitiva, la *modelización algebraica* será en este caso un instrumento primordial para construir una nueva organización que responda fundamentalmente a un *cuestionamiento tecnológico* de la primera y que, en cierto sentido, pueda considerarse como una extensión de ésta.

El esquema de modelización puede esquematizarse como sigue:



2.1. Descripción de la OM empírica en torno a la divisibilidad

Como ya hemos indicado empezaremos describiendo la organización matemática empírica en torno a la divisibilidad, utilizando los elementos teóricos aportados por la TAD. Nuestra descripción surge del análisis de textos escolares de diferentes editoriales — Editex, Mc Graw Hill, Teide, — estos textos juegan el papel de material empírico o material de laboratorio. Se trata de agrupar los tipos de problemas y las técnicas asociadas a ellos y los elementos tecnológicos y teóricos que aparecen en el material escolar para ver posteriormente qué modificaciones sufre la organización al ser algebrizada, es decir, al ser tomada como "el sistema inicial" de una actividad de modelización algebraica, esto es, de un proceso de algebrización.

La divisibilidad se estudia en el primer ciclo de Secundaria Obligatoria, la editorial Editex la presenta en 1º y 2ª de la ESO, mientras que Mc Graw-Hill y Teide la presentan en 1º de ESO. En los restantes cursos no se hace referencia a cuestiones sobre divisibilidad. De cada uno de los textos hemos elaborado una ficha con los siguientes datos:

LIBRO: Título

EDITORIAL:

AUTORES:

AÑO de PUBLICACIÓN:

NIVEL:

TEMA: En el que aparece la divisibilidad

Centramos nuestro estudio en el análisis de las siguientes cuestiones:

— Principales tipos de problemas y relaciones entre ellos.
— Principales técnicas asociadas a los tipos de problemas.
— Principales elementos tecnológico-teóricos que presenta el texto.

Finalizamos el análisis con unos comentarios generales sobre el tratamiento completo que cada editorial da al tema de la divisibilidad. Todos estos datos nos permitirán tener una visión global de la *organización matemática empírica en torno a la divisibilidad,* tal y como ha sido reconstruida en la ESO.

Comenzamos por los textos de la editorial Editex:

LIBRO: Matemáticas

EDITORIAL: Editex

AUTORES: Cristina, C. Y Pérez, E.

AÑO: 1996

NIVEL: 1 Ciclo de ESO

TEMA: *Múltiplos y divisores* (p. 24-33)

— *Principales tipos de problemas y relaciones entre ellos:*

π_1: Cálculo y reconocimiento de múltiplos y divisores de un número dado.

π_2: Cálculo del máximo común divisor y del mínimo común múltiplo (π_1 da lugar a π_2).

π_3: Sistemas extramatemáticos sobre situaciones coincidentes, es decir, que se repiten sincronizadamente.

— *Principales técnicas asociadas a los tipos de problemas:*

τ_1: Multiplicar y Dividir. Aplicación de reglas de divisibilidad.

τ_2: Utilizar τ_1 y de las listas obtenidas seleccionamos los divisores comunes y elegimos los que corresponden al mcd y mcm.

τ_3: Elegir el modelo y aplicar τ_2.

— *Principales elementos tecnológico-teóricos* (Ibid, p. 24-33)

> *Los **múltiplos de un número** son los que resultan **de multiplicar dicho número por cualquier otro entero**.*
> *Un número es **divisible** entre aquellos números (sus **divisores**) que cumplen que la **división** del número entre cualquiera de ellos **es** una división **exacta**.*
> *Cualquier **número es divisor de todos sus múltiplos**. También, cualquier número **es múltiplo de todos sus divisores**.*
> *Cuando un número **no es divisible entre un cierto número, tampoco será divisible entre los múltiplos** de ese número.*
> *Los **múltiplos comunes a varios números** son los números que son múltiplos de cada uno de dichos números, es decir, los que estarían en las listas de múltiplos de cada uno de ellos.*
> ***El menor de los múltiplos comunes es el mínimo común múltiplo**.*

*Los **múltiplos comunes** de una serie de **números son múltiplos del mínimo común múltiplo** de esos números.*
*Los **divisores comunes a varios números** son los que son divisores, a la vez, de cada uno de esos números, es decir, los que estarían en las listas de múltiplos de cada uno de ellos.*
***El mayor de los divisores comunes es el máximo común divisor**.*
*Los **divisores comunes de varios números** son los que se repiten en todas y cada una de las listas de divisores de esos números.*

LIBRO: Matemáticas

EDITORIAL: Editex

AUTORES: Cristina, C. Y Pérez, E.

AÑO: 1996

NIVEL: 2º ESO

TEMA: *Divisibilidad en los números enteros* (p. 6-17)

— Principales tipos de problemas y relaciones entre ellos:

π_1: Reconocimiento de múltiplos, divisores o divisible por. Números primos y compuestos.

π_2: Descomponer un número en factores y en factores primos.

π_3: Contar múltiplos de un número comprendidos entre otros dos números dados.

π_4: Cálculo de restos sin hacer la división.

π_5: Cálculo de números que cumplan ciertas condiciones de divisibilidad.

π_6: *Cálculo de todos los divisores de un número.*

π_7: Cálculo del máximo común divisor y del mínimo común múltiplo.

π_8: Sistemas extramatemáticos sobre situaciones coincidentes, es decir, que se repiten sincronizadamente.

— Principales técnicas asociadas a los tipos de problemas:

τ_1: Multiplicar y Dividir. Aplicar reglas de divisibilidad.

τ_2: Multiplicar y Dividir . Aplicación de reglas de divisibilidad.

τ_3: Reconocer múltiplo y divisores y contarlos.

τ_4: Aplicando las reglas de divisibilidad restar al número el múltiplo del divisor más próximo al dividendo por defecto.

τ_5: Estudio de casos concretos y aplicación de reglas de divisibilidad.

τ_6: Descomponer el número en factores primos, π_2 según τ_2, y seguidamente realizar un estudio de casos (aritmético) o aplicar la *modelización algebraica*:

si $f = a^n \cdot b^m \cdot c^p$,

el número de divisores de f *es* $(n+1) \cdot (m+1) \cdot (p+1)$

τ_7: Aplicar los algoritmos a los números descompuestos en factores primos.

τ_8: Elegir el modelo y aplicar alguna de las técnicas anteriores.

— ***Principales elementos tecnológico-teóricos*** (Ibid,p. 6-17)**:**

*Los **múltiplos** de un número son los que se obtienen al multiplicar dicho número por cualquier otro número entero.*
*Los **divisores** de un número son los números enteros que se obtienen al dividir dicho número entre otro número entero, que también será un divisor (la división debe ser exacta).*
*Se dice que un número es **divisible** entre otro si el segundo es divisor del primero (o el primero múltiplo del segundo).*
Por cada divisor positivo hay otro negativo: su opuesto. Lo mismo podemos decir respecto a los múltiplos.
Los únicos divisores de un número primo son: 1, -1, él mismo y su opuesto. Los números compuestos tienen más divisores además de ésos.
Para encontrar el producto de factores primos que corresponde a un número, se busca un divisor primo cualquiera y se realiza la división. Se hace lo mismo con el cociente que hemos obtenido y así continuamos hasta que el resultado de la división sea 1
Los múltiplos comunes a varios números son los que tienen una descomposición factorial que incluye, por lo menos, todos los factores de esos números. El mínimo común múltiplo (mcm) será el que lo cumpla con el menor número de factores primos posible.
El mcm de varios números se obtiene tomando los factores primos de las descomposiciones de esos números. Cada número primo irá elevado al mayor exponente que lleve en esas descomposiciones factoriales (si es que lleva exponente en alguna).
El máximo común divisor (MCD) de varios números es el mayor de los divisores comunes. Se puede obtener a partir de las descomposiciones factoriales de dichos números.

El MCD de varios números se obtiene tomando sólo los factores comunes a dichos números, elevados (si es necesario) al menor de los exponentes que lleven en esas descomposiciones factoriales.
Se dice que dos números son primos entre sí cuando en sus descomposiciones factoriales no hay factores comunes.

— ***Comentarios sobre el tratamiento general que la editorial Editex da al tema de la divisibilidad***

En esta editorial y respecto a la divisibilidad *no encontramos de forma explícita ninguna técnica algebraica y ningún elemento tecnológico algebraico*. Los tipos de problemas, las técnicas y los discursos tecnológicos se mantienen en el nivel aritmético, es decir, se trata de técnicas retóricas propias de la aritmética, sin ningún tipo de formalización. A pesar de que el tipo de problemas π_6*: Cálculo de todos divisores de un número,* en segundo curso, permitiría una iniciación en el proceso de algebrización, la técnica asociada τ_6, apoyada en la τ_2, corresponde a un estudio de casos sencillos y al uso exclusivo de herramientas aritméticas. Nos parece muy importante subrayar que aunque el discurso tecnológico habla de la divisibilidad en los números enteros, *no se desarrolla ninguna actividad en este dominio*, todas se restringen a los naturales.

LIBRO: Matemáticas
EDITORIAL: Mc Graw Hill
AUTORES: Pancorbo, L.; Becerra, Mª V.; Martínez, R. y Rodríguez, R.
AÑO: 1996
NIVEL: 1º ESO
TEMA: *Divisibilidad* (p. 44-61)

— ***Principales tipos de problemas y relaciones entre ellos:***

π_1: Reconocimiento de múltiplos, divisores o divisible por. Números primos y compuestos.

π_2: Descomponer un número en factores y en factores primos.

π_3: Cálculo del máximo común divisor y del mínimo común múltiplo.

π_4: Sistemas extramatemáticos sobre situaciones coincidentes, es decir, que se repiten sincronizadamente.

— Principales técnicas asociadas a los tipos de problemas:

τ_1: Multiplicar y Dividir. Aplicar reglas de divisibilidad.

τ_2: Multiplicar y Dividir . Aplicar de reglas de divisibilidad.

τ_3: Descomponer en factores y en factores primos (π_2) y aplicar algoritmos a los números factorizados.

τ_4: Elegir el modelo y aplicar reglas de cálculo del mínimo común múltiplo y del máximo común divisor.

— ***Principales elementos tecnológico-teóricos*** (Ibid, p. 44-61)**:**

Todo número natural es múltiplo de sí mismo.
Para hallar los múltiplos de un número se le multiplica por los números naturales.
Un número es divisor de otro si al hacer la división entre ellos ésta es exacta.
Entre dos números a y b pueden existir varias relaciones:
Si a es múltiplo de b, entonces b es divisor de a, y a es divisible por b
Los números que sólo tienen por divisores al 1 y a él mismo, se llaman números primos. En cambio, a los que tienen más divisores se les llama compuestos.
Vemos que entre todas las maneras de escribir un número como producto, hay una en la que todos sus factores son números primos o potencias de números primos. A esta expresión se le llama factorización.
Para factorizar un número se puede utilizar uno de los métodos siguientes:

(a) Expresamos el número como producto del menor número primo que lo divida por otro número. Si el segundo factor no es primo, se repite el proceso hasta llegar a un producto con todos los factores primos.
(b) Hacemos la descomposición en forma de árbol."
Al mayor de los divisores comunes de varios números se le llama máximo común divisor y se expresa de forma abreviada como m.c.d.. Para calcularlo se hallan los divisores de cada número, se buscan los que son comunes a todos y se toma el mayor.
Cuando los números son muy grandes, hay otra forma de hacerlo que consiste en descomponer en factores primos cada número: El máximo común divisor está formado por los factores primos comunes a todos los números elevados al menor exponente.
Al menor de los múltiplos comunes de varios números se le llama mínimo común múltiplo, y se expresa de forma abreviada como m.c.m. Para encontrarlo se hallan los múltiplos de cada uno de los números, se buscan los múltiplos comunes y se toma el menor.
Otra forma más rápida de hallar el m.c.m. consiste en descomponer cada número en factores primos: El mínimo común múltiplo de varios números está formado por los factores comunes y no comunes a todos los números, elevados al mayor exponente."

En un resumen del tema titulado: NO DEBES OLVIDAR aparece por primera vez un inicio de algebrización:

> *Un número a es múltiplo de b si hay un número natural c que multiplicado por b es igual a a .*
>
> $$\boldsymbol{a = b \cdot c}$$
>
> *Un número a es divisor de b si b es múltiplo de a, y se expresa b = a · c donde c es un número natural.*

— *Comentarios sobre el tratamiento general que la editorial Mc. Graw Hill da al tema de la divisibilidad*

En esta editorial y respecto a la divisibilidad tampoco *encontramos ninguna técnica algebraica y ningún elemento tecnológico algebraico*. Los tipos de problemas, las técnicas y los discursos tecnológicos se mantienen en el nivel aritmético. Solamente aparece un inicio de algebrización en el *momento de la institucionalización* de las nociones de mcd y mcm, en el que se produce el paso del discurso retórico a las fórmulas.

El tipo de problemas *Cálculo de todos los divisores de un número* que admitiría un estudio algebrizado no aparece en los textos de esta editorial.

LIBRO: Matemáticas
EDITORIAL: Teide
AUTORES: Bailo, C.; Casals, R.; Goma, A. Y Turudí, J.
AÑO: 1996
NIVEL: 1º ESO
TEMA: *Divisibilidad* (p. 32-55)

— *Principales tipos de problemas y relaciones entre ellos:*

π_1: Reconocimiento y Cálculo de múltiplos, divisores o divisible por. Números primos y compuestos.

π_2: Descomponer en factores y en factores primos.

π_3: Cálculo de cifras en números para que cumplan una determinada condición de divisibilidad.

π_4: Cálculo del máximo común divisor y del mínimo común múltiplo.

π_5*: Cálculo del número de divisores de un número.*

π_6: Sistemas extramatemáticos sobre situaciones coincidentes, es decir, que se repiten sincronizadamente.

— **Principales técnicas asociadas a los tipos de problemas:**

τ_1: Multiplicar y Dividir. Aplicar criterios de divisibilidad.

τ_2: Multiplicar y Dividir . Aplicar criterios de divisibilidad.

τ_3: Aplicar criterios o reglas de divisibilidad.

τ_4: Descomponer en factores y en factores primos (π_2) y aplicar seguidamente las reglas y algoritmos pertinentes.

τ_5: Descomponer el número en factores primos, π_2 según τ_2, y, seguidamente realizar un estudio de casos (aritmético) o aplicar la *modelización algebraica:*

si $f = a^n \cdot b^m \cdot c^p$,

el número de divisores de f es $(n+1) \cdot (m+1) \cdot (p+1)$

τ_6: Elegir el modelo y aplicar reglas.

— ***Principales elementos tecnológico-teóricos*** (Ibid, p. 32-55)**:**

Si $b \cdot c = a$, al dividir el producto a por uno de los factores (b o c) obtendremos el otro factor (c o b) y la división, además, será exacta.
*Los números que se obtienen al multiplicar un número natural por otro se llaman **múltiplos** de estos números.*
a es múltiplo de b si podemos encontrar un número c tal que $a = b \cdot c$. También se dice, en este caso, que a es divisible por b.
Si $a = b \cdot c$, entonces a es múltiplo de b y de c.
Si un número es múltiplo de otros números, lo podemos descomponer en el producto de dos o más factores.
Si $a = b \cdot c$, entonces b y c son divisores de a.
Un número b es divisor de un número a cuando la división de a por b es exacta.
Un número a es divisible por un número b cuando la división de a por b es exacta.
Llamamos números primos los números que sólo son divisibles por ellos mismos y por la unidad. Los números que no son primos se llaman números compuestos.
Para saber si un número es primo, lo hemos de dividir por todos los primos más pequeños que este número, hasta obtener un cociente más pequeño que el divisor utilizado. Si la división no es exacta en ningún caso, el número es primo.
Para descomponer un número compuesto, utilizaremos esta propiedad: buscaremos siempre el número primo más pequeño que sea divisor del número dado y de los números que resulten de cada división.

La descomposición se acaba en el momento en que obtenemos un número primo como cociente de una de las divisiones que estamos haciendo.
La descomposición de un número en factores primos es única.
El máximo común divisor es el mayor de los divisores comunes de dos o más números.
Para calcular el máximo común divisor de dos o más números se descomponen estos números en sus factores primos y se confecciona un producto de los factores comunes con el exponente más pequeño con que aparecen en las descomposiciones.
Existe un algoritmo basado en cocientes sucesivos que nos permite encontrar el máximo común divisor de dos números sin necesidad de descomponerlos en factores primos. Se llama algoritmo de Euclides.
Cuando dos o más números no tienen ningún divisor común diferente de la unidad, decimos que estos números son primos entre sí o primos relativos.
Los cocientes que resultan de dividir dos o más números por su mcd son primos entre sí.
Si dos o más números se multiplican o se dividen por otro número, el mcd queda multiplicado o dividido por este mismo número.
Todo divisor común de dos o más números divide a su mcd.
El mínimo común múltiplo de dos o más números es el menor de los múltiplos comunes de estos números.
Para calcular el mínimo común múltiplo de dos o más números, primero tenemos que descomponer estos números en factores primos y, a continuación se hace el producto de todos los factores con el exponente mayor con que aparecen en las descomposiciones.
Si multiplicamos o dividimos dos o más números por otro número, el mcm también queda multiplicado o dividido por este mismo número.
Los múltiplos comunes de dos o más números son múltiplos comunes del mcm de estos mismos números.
Los múltiplos del mcm de dos o más números son múltiplos comunes de estos números.
El producto de dos números es igual al producto del máximo común divisor por el mínimo común múltiplo de estos mismos números.
Hay una regla práctica para calcular cuántos divisores tiene un número. Consiste en multiplicar los exponentes de los factores que componen un número, a los que previamente habremos sumado una unidad. Así,
si $f = a^n \cdot b^m \cdot c^p$, *el número de divisores de f es* $(n+1) \cdot (m+1) \cdot (p+1)$

— *Comentarios sobre el tratamiento general que la editorial Teide da al tema de la divisibilidad*

En este libro de texto de la editorial Teide y respecto a la divisibilidad encontramos *más formulaciones algebraicas* que en los textos de las anteriores editoriales. A lo largo del tema aparecen de forma explícita elementos tecnológico expresados en lenguaje algebraico: así en la primera página del tema (p. 34) ya leemos:

"a es múltiplo de b si podemos encontrar un número c tal que a = b.· c"

Es decir, la relación de múltiplo o divisor entre números está condicionada a la existencia de números que cumplan unas determinadas condiciones y no exclusivamente a operaciones aritméticas, lo que permitirá modelizar todas las técnicas matemáticas que hemos denominado *reglas de verbales de divisibilidad.* De esta manera se satisface parcialmente el rasgo **RMA1**.

La unicidad de la descomposición factorial de un número, que aparece de forma explícita, justificaría algunos procedimientos que en el texto aparecen como reglas verbales, es decir, podría plantearse una tematización de las técnicas y una nueva problemática a nivel tecnológico, que corresponde al **IGA3**. Además, *admitiría* un tipo de problemas en los que se podría manipular la estructura global de los problemas, es decir podría dar cuenta del indicador **IGA1**.

No obstante, *esta algebrización, a nivel tecnológico* es bastante "decorativa" puesto que su incidencia es casi nula en el nivel de los *tipos de problemas* que el texto presenta y por lo tanto en las *técnicas* que utiliza.

Observamos que el principio general de funcionamiento de la "lógica de los textos" es el siguiente:

- Tenemos una propiedad, en la organización matemática aritmética, que viene dada a través de una regla o una frase.
- Esta propiedad se transforma en algebraica a través de una fórmula.
- La aplicación de las fórmulas dan lugar a nuevas técnicas de sustitución.

Podríamos considerar, en resumen, que en la organización matemática empírica que se ha reconstruido en la ESO en torno a la *divisibilidad,* se distinguen los 6 grandes tipos de problemas (π) que a continuación detallamos con sus correspondientes técnicas asociadas (τ):

π_1: *Deducir propiedades inmediatas relativas a los múltiplos y divisores de los números naturales.*

τ_1: Aplicar la definición de múltiplo y divisor, junto con las propiedades del producto y de la división.

π_2: *Hallar los múltiplos comunes a dos o más números y, en particular, el mínimo común múltiplo (mcm).*

τ_2. Construir una tabla con los múltiplos de cada uno y buscar los números comunes. La construcción de la tabla puede hacerse de diversas formas: multiplicando, sumando, etc.

τ_2': Si sólo tenemos dos números la tabla puede construirse con los múltiplos del menor y los de la diferencia entre los dos números dados. El primer número común se sumará al múltiplo del menor y tendremos el mcm. En caso de buscar múltiplos comunes mayores que el mcm construiremos la tabla de múltiplos del mcm.

π_3: *Hallar los divisores comunes a dos o más números y en particular el máximo común divisor (mcd)*

τ_3: Calcular los divisores de cada número, hacer una tabla y buscar los comunes

τ_3': Algoritmo de Euclides: división del mayor por el menor, del menor por el primer resto, y así sucesivamente hasta obtener un resto igual a cero.

τ_3'': Algoritmo de Euclides con la diferencia: resta del mayor con el menor, de la diferencia con el menor (o viceversa), y así sucesivamente hasta llegar a 0.

π_4: *Hallar los divisores de uno o más números que, a su vez, son múltiplos de otros.*

τ_4: Tabla con divisores (según técnicas τ_3), tablas con múltiplos (según técnicas τ_2) y números comunes.

τ_4': Optimizar la técnica utilizando propiedades del mcd y del mcm: los divisores de dos o más números son divisores de su mcd; los múltiplos de dos o más números son múltiplos de su mcm.

π_5: *Deducir los divisores de un número a partir de su escritura decimal.*

τ_5: Utilizar los criterios de divisibilidad por 2, 3, 5, 9, 10, 11, etc. Para decidir si un número es o no es divisible o múltiplo de un número dado.

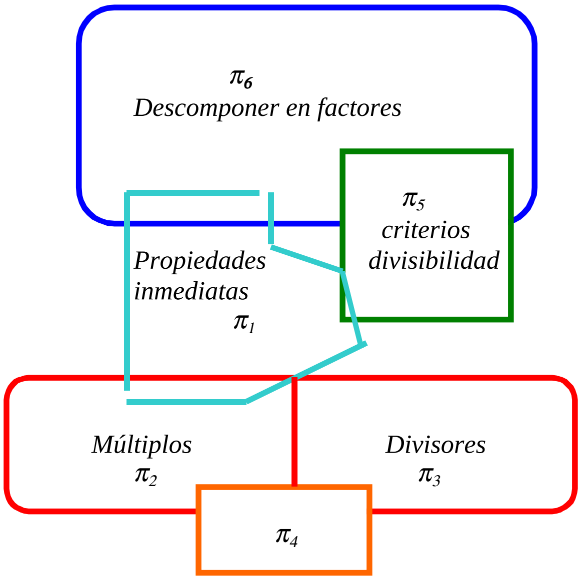
τ_5': Utilizar τ_5 con variaciones: hallar los divisores o múltiplos de dos o más números, hallar todos los números que cumplen cierta relación de divisibilidad, etc.

π_6: Descomponer un número en factores primos.

τ_6: Buscar todos los posibles divisores del número utilizando τ_5 y la división (a mano o con calculadora) con los números menores que el número dado.

τ_6': Utilizar τ_6 sólo con los números inferiores a la raíz cuadrada del número dado y conociendo previamente todos los primos menores que 100.

Las relaciones entre los tipos de problemas y las diferentes técnicas las podemos representar:



2.2. Algebrización de la divisibilidad

El proceso de algebrización de esta organización matemática consistiría en primer lugar en modelizar las técnicas expuestas, lo que corresponde al rasgo **RMA1**, para posteriormente analizar las repercusiones de esta modelización sobre los restantes componentes de la OM.

El trabajo de Josep Gascón sobre divisibilidad (1997_b, 2002_b) empieza modelizando la técnica aritmética del cálculo del mcm de dos números dados, problema tipo π_2 y técnica τ_2. Recordamos que la aplicación de la técnica aritmética consiste en buscar los múltiplos del menor de los números y de la diferencia entre ellos, por ejemplo, mcm (240, 300)

	300 - 240	
240	+ 60	300
480	+120	
720	+180	
960	+240	1200

Para construir un modelo algebraico de esta técnica utilizamos la traducción algebraica (a fórmulas) de una de las definiciones de múltiplo:

"a es múltiplo de b si podemos encontrar un número c tal que $a = b \cdot c$" (Teide) [13]

Con esta forma de expresar la noción de múltiplo, la técnica aritmética del cálculo de los múltiplos comunes de 240 y 300 puede describirse como sigue:

300 x es múltiplo de 240 si y solo si existe un número natural c tal que:

$$300x = 240c$$

como $$300x = 240x + (300 - 240)x$$

sustituyendo el primer miembro $$240x + (300 - 240)x = 240c$$

$$(300 - 240)x = 240c - 240x$$

$$60x = 240y$$

$$x = 4y$$

Así pues, los múltiplos comunes a 240 y a 300 son de la forma:

$$300x = 300(4y) = 1200y$$

Para $y = 1$ tendremos el menor múltiplo común de 240 y 300, y para y = 2, 3, 4,… el resto de los múltiplos comunes.

[13] Bailo, C. et al (1996).

En general si $a < b$ son dos números naturales, entonces para un número natural x, el número $b\,x$ es múltiplo común de a y b si y sólo si existe un número natural y que cumpla:

$$(b - a)\,x = a\,y$$

Es decir, si existe un número natural c que cumpla:

$$b\,x — a\,c = 0$$

El problema tipo π_2 de calcular el mcm de dos números naturales se reduce a resolver una ecuación diofántica lineal homogénea con dos incógnitas, a buscar la pareja más pequeña de números naturales (x, c) que cumple

$$\boxed{b\,x — a\,c = 0}$$

De forma análoga, en la modelización de la técnica aritmética que sirve para calcular el mcd de dos números (π_3 y τ_3) podemos usar la definición de "divisor":

> *"Un número b es divisor de un número a cuando la división de a por b es exacta"*
> *"Si $a = b \cdot c$, entonces b y c son divisores de a" (Teide)*[14]

Así si $a < b$ son dos números naturales, entonces d será divisor común de a y b si y solo sí existen otros naturales x e y con $x < y$ que cumplan:

$$a = x \cdot d$$
$$b = y \cdot d$$

Es decir, $$\frac{a}{x} = \frac{b}{y}$$

El problema se reduce a resolver la ecuación $a \cdot y = b \cdot x$
La "menor" pareja (y, x) que cumple dicha ecuación proporciona el mcd (a,b).

La modelización propuesta dará origen a una organización matemática más algebrizada en el sentido definido por los indicadores del grado de algebrización anteriormente descritos:

[14] Bailo, C. et al (1996).

— **IGA1**. Manipulación de la estructura global de los problemas. En nuestro caso, la organización matemática obtenida en torno a las ecuaciones diofánticas lineales permite mostrar la estructura global de los problemas mediante una relación, una fórmula y manipular globalmente dicha estructura global. En la citada organización existe la posibilidad de estudiar las condiciones de existencia del objeto incógnita. Y es posible, además, estudiar la estructura del conjunto de las soluciones.

— **IGA2**. En cuanto a la posibilidad de llevar a cabo un *cuestionamiento tecnológico*, el avance también es considerable. En efecto, al poder "materializar" simbólicamente la estructura formal de la *condición* del problema (que liga la incógnita con los datos), es posible "manipular dicha estructura" mediante ciertas reglas formales y llevar a cabo "justificaciones" y hasta "demostraciones" relativas a dicha estructura.

— **IGA3**. En la *unificación de los tipos de problemas* y la *integración de las técnicas*, el progreso ha sido evidente. Podría decirse que hemos incluido la totalidad de clases de problemas aritméticos de la organización matemática en torno a los múltiplos y divisores en N en un gran tipo de problemas de la organización matemática en torno a las ecuaciones diofánticas en Z. Únicamente no hemos podido incluir en este "nuevo" tipo de problemas los que requieren "buscar todos los divisores de un número dado".

— **IGA4**. Al utilizar las ecuaciones diofánticas lineales como modelo algebraico de los problemas aritméticos de divisibilidad, ha sido posible generar nuevos tipos de problemas *cada vez más alejados del contexto puramente aritmético de los números naturales*, lo que constituye un avance importante en el último indicador, IGA4, del grado de algebrización.

En resumen, la organización matemática en torno a las ecuaciones diofánticas en Z está mucho más "algebrizada" que la organización inicial. También podemos afirmar que este proceso de algebrización constituye una *completación relativa* del sistema matemático inicial puesto que:

(a) Se han integrado y ampliado las clases de problemas existentes en el sistema inicial.

(b) Se han construido nuevas técnicas como desarrollo y generalización de las técnicas aritméticas puntuales iniciales.

(c) La práctica matemática en la organización obtenida aporta elementos esenciales para describir, interpretar y justificar el uso y el alcance de las técnicas aritméticas que se utilizaban en la organización aritmética en torno a los múltiplo y divisores en N.

Por lo tanto, el proceso de algebrización de la organización matemática en torno a los múltiplo y divisores en N da lugar a una integración de organizaciones puntuales relativas a un tipo de problema y sus técnicas (mcd y mcm) en otra *organización local* en torno a las *ecuaciones diofánticas en Z.*

3. LA ALGEBRIZACIÓN DE LAS RELACIONES ENTRE MAGNITUDES: DE LA PROPORCIONALIDAD A LA MODELIZACIÓN FUNCIONAL

Partiremos en lo que sigue de la organización matemática clásica, prealgebraica, que se construyó en torno a la proporcionalidad de magnitudes. Dicha organización, que se ha descrito y analizado con detalle en Bosch (1994), se estructura alrededor de unos problemas muy estereotipados, conocidos como *"problemas de proporcionalidad"* o *"problemas de regla de tres"*, agrupados a su vez en tipos de problemas también estándar —proporcionalidad directa, inversa o compuesta, repartos proporcionales, reglas de interés, etc.— conformando el bloque temático más importante de la "aritmética enseñada" antes de la reforma de las matemáticas modernas. Todas las técnicas que permiten resolver estos problemas: método de reducción a la unidad, método de las proporciones, reglas de tres, método gráfico, regla de las causas y efectos, etc., se fundamentan en un discurso tecnológico-teórico también estándar, más o menos explícito y desarrollado según la institución considerada, cuya designación habitual es la *"Teoría de las razones y proporciones"* o *"Teoría de las magnitudes proporcionales"*.

La organización clásica alrededor de la proporcionalidad jugará, en nuestra descripción del proceso de algebrización, el papel de sistema inicial, de "sistema a modelizar". La modelización algebraica que proponemos podría tener su origen, como suele ser habitual, en el cuestionamiento tecnológico de la organización matemática inicial, esto es, en la necesidad de describir, explicar, producir y justificar los elementos que componen dicha organización clásica. Dicho proceso de algebrización vendría, en cierto sentido, a responder a cuestiones del tipo:

— ¿Qué es un problema de proporcionalidad?

— ¿Qué relación hay entre los diferentes tipos de problemas de proporcionalidad?

— ¿Cómo se resuelven?, ¿Por qué se resuelven de esta forma?

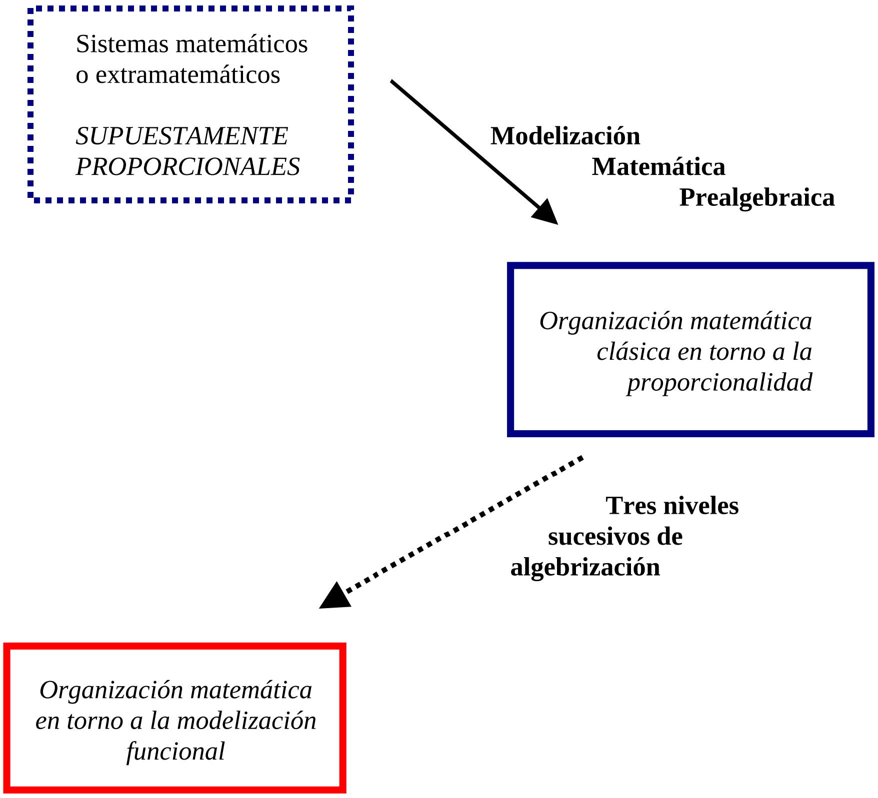
— ¿Cuál es el alcance de esta manera de proceder?

— ¿Cómo se interpretan y justifican las diferentes técnicas que se utilizan y, en particular, la "regla de tres"?

— ¿Cómo podrían desarrollarse para generar técnicas más flexibles, más potentes o más económicas?

— ¿Cómo podrían integrarse (algunos de) los tipos de problemas que aparecen aislados en la organización clásica alrededor de la proporcionalidad?, etc.

La algebrización progresiva de la organización clásica, que presentaremos a continuación como un proceso segmentado en tres niveles, conducirá, como veremos, a la inclusión de la proporcionalidad dentro de la organización matemática más amplia construida alrededor de *modelización funcional* y, más en general, de las *funciones multilineales*. Veremos después que la transposición didáctica traerá al sistema de enseñanza escolar elementos de las organizaciones algebrizadas de los distintos niveles intermedios, haciendo que coexistan, sin llegar nunca a articularse, ingredientes de organizaciones matemáticas que se encuentran en estados de desarrollo muy distintos.



3.1. Organización clásica en torno a la proporcionalidad de magnitudes

Empezaremos recordando la estructura y las limitaciones de la organización matemática clásica en torno a la proporcionalidad de magnitudes. En los problemas de proporcionalidad se parte siempre de ciertos sistemas emblemáticos en los que aparecen dos magnitudes concretas supuestamente "proporcionales": cantidad de mercancía y coste, cantidad de trabajo y número de obreros, etc. La noción de proporcionalidad permanece en este universo hasta tal punto ligada a esos *sistemas supuestamente proporcionales* que la presentación de los mismos constituye para la organización clásica el primer modelo de la relación de proporcionalidad.

En un *problema de proporcionalidad simple* aparecen siempre cuatro cantidades *a, b, c, x*, las dos primeras relativas a una magnitud *M* y las otras dos a otra magnitud *M’*, con una correspondencia entre *M* y *M’* que relaciona *a* con *c* y *b* con *x*. De las cuatro cantidades, se conocen tres valores *a, b, c* y se desconoce el valor de la cuarta *x*. Una de las técnicas matemáticas más evolucionadas que propone la organización clásica para resolver los problemas de proporcionalidad simple puede describirse como sigue: A partir del enunciado, se destacan en un modelo tabular las magnitudes *M* y *M’*, junto con las cantidades conocidas *a, b, c* y la incógnita *x* correspondientes:

M	*M’*
a	*c*
b	*x*

Después se decide, con un simple discurso verbal del tipo: “a más mercancía, más precio” o “a más velocidad, menos tiempo”, si la relación entre *M* y *M’* es una proporcionalidad directa o inversa. Esta información permite establecer un segundo modelo escrito, una ecuación proporcional:

— para el caso de la proporcionalidad directa

$a : b :: c : x$ que posteriormente se escribió en forma fraccionaria $\frac{a}{b} = \frac{c}{x}$

— para el caso de la proporcionalidad inversa

$a : b :: x : c$ que posteriormente se escribió en forma fraccionaria $\frac{a}{b} = \frac{x}{c}$

La resolución de la ecuación proporcional, que el conjunto técnico-tecnológico de la teoría de las razones y proporciones se encarga de presentar y justificar, permite hallar el valor de *x* a partir de una regla simple:

— si *x* es un “extremo”, se multiplican los “medios” y se divide por el otro “extremo” (caso directo: $x = bc/a$)

— si *x* es un “medio”, se multiplican los “extremos” y se divide por el otro “medio” (caso inverso: $x = ac/b$).

En las organizaciones escolares actuales siguen existiendo algunos elementos de esta organización clásica, aunque puedan tener formalmente una apariencia más o menos modernizada. Veamos, por ejemplo, la técnica oficial que propone, en 1996, uno de nuestros libro de texto de gran difusión, para los alumnos españoles de 1º de ESO[15]:

> *Si se sabe que el precio a pagar por unas libretas es proporcional al número de libretas compradas, y 5 libretas han costado 275 pesetas, ¿cuánto costarán 8 libretas?*

Para resolver este problema, representaremos con la letra *x* el precio total que costarán las libretas que queremos comprar. El método que se propone para resolver problemas análogos al anterior se designa con el nombre de regla de tres directa. Se suele plantear de la siguiente manera:

valores de una magnitud		valores de la otra magnitud
5	--	275
8	--	*x*

A partir de esta asociación de valores, se puede escribir la proporción:

$$\frac{5}{8}=\frac{275}{x}$$

Interpretamos el valor de *x* de dos maneras, tal y como ya hemos comentado:

$x=\frac{8\cdot 275}{5}$ resultado de multiplicar en cruz las cantidades conocidas y de dividir el producto por la otra cantidad conocida;

$x=8\cdot\frac{275}{5}$ resultado de multiplicar el número de libretas por el precio de una libreta.

Técnicamente, la organización clásica puede resultar muy eficaz dentro de su propio ámbito, lo que explica en parte su pervivencia generalizada en la Enseñanza Secundaria europea hasta mediados del siglo XX. Sus limitaciones se situaron esencialmente en el nivel tecnológico-teórico y afectaron tanto la función de *descripción* de la organización como la de *justificación* de las técnicas. En el primer caso, la teoría de las razones y proporciones apareció cada vez más como una creación endógena, destinada a particularizar un tipo de relación entre magnitudes que las nuevas herramientas algebraicas y funcionales permitían generalizar y relacionar con otros ámbitos. En el segundo caso, el discurso justificador

[15] Bailo, C. et al. (1996).

de la regla de tres, basado esencialmente en ciertas evidencias culturales relativas a la manipulación de magnitudes, no permitió proponer una tecnología adecuada para explicar las variaciones técnicas de la regla de tres inversa y compuesta. En efecto, el desarrollo de estas técnicas acababa reduciendo, en la práctica, los problemas de proporcionalidad inversa y los de proporcionalidad compuesta a problemas de proporcionalidad simple entre una magnitud y la inversa de otra o entre una magnitud y el producto de otras –magnitudes inversas y magnitudes producto que la tecnología clásica no podía considerar–.

3.2. Algebrización hipotética de la organización clásica

Una modelización algebraica de la organización matemática clásica en torno a la proporcionalidad unificará todas las técnicas y los tipos de problemas clásicos de proporcionalidad. Es decir, deberá satisfacer los rasgos que hemos denominado **RMA1** y **RMA2**, que dicen que las modelizaciones algebraicas *modelizan explícita y materialmente las técnicas matemáticas* que forman parte de la organización matemática que juega el papel de *sistema* a modelizar (**RMA1**), y que *modelizan íntegramente todos los componentes de la organización matemática* que hace el papel de sistema, en lugar de limitarse a modelizar aisladamente algunos de dichos componentes (**RMA2**). Veremos, de nuevo, que esta modelización global permite considerar que el *modelo algebraico*, como nueva organización matemática, *constituye una extensión de la organización-sistema* inicial y hasta una *completación* relativa del mismo. Mostraremos, en efecto, que los diferentes tipos de problemas de proporcionalidad de magnitudes —simple, compuesta, directa e inversa— se integrarán en un único modelo algebraico, y que las técnicas clásicas se podrán describir como diferentes variantes del trabajo de este modelo.

Y, sobre todo, veremos cómo, en la organización matemática algebrizada que se obtiene, que es “hipotética” en el sentido de que no existe ni ha existido nunca en ninguna organización escolar, se puede construir un discurso tecnológico capaz de interpretar y justificar adecuadamente el conjunto de todas las técnicas de proporcionalidad —simple directa, simple inversa, compuestas.

Además, observaremos que a medida que avanzamos en el proceso de modelización, los indicadores que establecen lo que hemos denominado *grado de algebrización* van teniendo una presencia cada vez más fuerte:

IGA1. *Manipulación de la estructura global de los problemas.*
IGA2. *Tematización de las técnicas y nueva problemática a nivel tecnológico.*
IGA3. *Unificación y reducción de los tipos de problemas, técnicas y tecnologías.*
IGA4. *Emergencia de tipos de problemas independientes del sistema modelizado.*

3.2.1. Primer nivel de algebrización: La modernización del lenguaje técnico

La modelización algebraica que proponemos puede descomponerse en *tres etapas o niveles de algebrización*. El primer nivel consiste en modelizar mediante *ecuaciones* los diferentes tipos de relaciones de proporcionalidad. Así, se dirá que dos magnitudes X e Y son *directamente proporcionales* cuando se puede establecer una correspondencia entre ellas de tal forma que, entre una cantidad cualquiera x de X y su correspondiente y de Y se cumpla la relación $y = kx$ para un determinado valor constante k. Aparece aquí un nuevo elemento, el "*coeficiente de proporcionalidad*", "*constante de proporcionalidad*" o "*factor de conversión*", k, cuyo valor depende de las unidades con las que se expresan las cantidades x e y, y que se puede interpretar como la cantidad de Y que corresponde a una unidad de X o, también, como la medida de la cantidad y que le corresponde a la cantidad x cuando se toma x como unidad. Análogamente, la proporcionalidad inversa se expresa mediante una relación del tipo $xy = k$ o bien $y = k/x$ (= kx^{-1}). En el caso de la proporcionalidad compuesta, se dirá que Y es directamente proporcional a X_1, X_2, …, X_i e inversamente proporcional a X_{i+1}, …, X_n cuando se tenga una relación del tipo:

$$y = k\frac{x_1 x_2 \ldots x_i}{x_{i+1} \ldots x_n}$$

Este *primer nivel de algebrización* es el único que aparece, a lo sumo, en las instituciones escolares actuales, aunque no se realiza casi nunca de forma completa. Por ejemplo, en el caso de la proporcionalidad inversa, es muy poco frecuente encontrar la relación expresada en forma de un producto del tipo $xy = k$ debido a la dificultad teórica de interpretar el producto de dos cantidades de magnitud xy. Del mismo modo, en el caso de la proporcionalidad compuesta, casi nunca aparece una expresión general del tipo $y = k\frac{x_1 x_2 \ldots x_i}{x_{i+1} \ldots x_n}$ y, en caso de aparecer, nunca se establece directamente, sino que se construye por etapas sucesivas como adjunciones de relaciones de proporcionalidad simple.

En este primer nivel de algebrización *los tipos de problemas y las técnicas se mantienen muy próximos a los de la organización clásica*. La resolución de un problema de proporcionalidad sigue consistiendo en la distinción de las dos magnitudes relacionadas, en la determinación del "sentido" de la relación de proporcionalidad, en la escritura de la relación que cumplen los datos y la incógnita del problema, y en el cálculo final del valor de la incógnita. Aparece sin embargo una diferencia importante en el lenguaje técnico, se abandonan las proporciones entre magnitudes y se introducen las ecuaciones entre medidas de cantidades de magnitud. Esta diferencia tiene sus consecuencias en el nivel tecnológico-teórico: la relación de proporcionalidad entre *magnitudes* se convierte ahora en una *relación de proporcionalidad entre variables numéricas* que representan medidas de cantidades de magnitud.

3.2.2. El segundo nivel de algebrización: La reducción a la función lineal

El segundo nivel de algebrización surge de la necesidad de describir mediante un único modelo las tres relaciones de proporcionalidad establecidas en el primer nivel: directa, inversa y compuesta. Porque, aunque pueda parecer que la proporcionalidad compuesta permite realizar tal unificación, de hecho sólo aparece en el primer nivel como una *iteración* de las proporcionalidades simples y no como una *generalización* de éstas.

La realización de este segundo nivel parte de la consideración de todas las relaciones de proporcionalidad como casos particulares de una función *f* de varias variables reales, homogénea de grado ±1 con respecto a cada una de ellas:

$$\begin{array}{ccc} \mathrm{R} \times \mathrm{R} \times \mathrm{R} \times \ldots \times \mathrm{R} & \longrightarrow & \mathrm{R} \\ (x_1, x_2, \ldots\ldots, x_n) & \longrightarrow & f(x_1, x_2, \ldots\ldots, x_n) \end{array}$$

donde $f(x_1, x_2, \ldots, x_n) = k \cdot x_1^{\varepsilon 1} \cdot x_2^{\varepsilon 2} \cdot \ldots \cdot x_n^{\varepsilon n}$ con $\varepsilon_i = \pm 1$.

Este modelo funcional general permite reducir todos los problemas clásicos de proporcionalidad al único caso de la proporcionalidad simple directa definiendo la nueva variable:

$$x = k \cdot x_1^{\varepsilon 1} \cdot x_2^{\varepsilon 2} \cdot \ldots \cdot x_n^{\varepsilon n}$$

y considerando la función lineal de una variable real:

$$\begin{array}{ccc} \mathrm{R} & \xrightarrow{f^*} & \mathrm{R} \\ x & \longrightarrow & f^*(x) \end{array} \quad \text{con}$$

$$f^*(x) = kx, \qquad \text{donde} \quad k = f\,(1, 1, \ldots, 1) = f^*(1).$$

A fin de interpretar y justificar adecuadamente esta identificación y, por lo tanto, la reducción efectiva de todos los problemas clásicos de proporcionalidad al caso de la proporcionalidad simple directa, se necesita una *tecnología matemática que dé sentido a los productos y cocientes de magnitudes* sin ningún tipo de restricciones[16]. La inexistencia de esta tecnología explica, en parte, que este segundo nivel de algebrización haya estado absolutamente ausente de todos los componentes de la actual organización matemática escolar en torno a la proporcionalidad.

En efecto, hoy día, por lo menos en la Enseñanza Secundaria española, no se ha construido ninguna técnica algebraica eficaz que permita resolver los antiguos problemas de proporcionalidad compuesta, reduciéndolos previamente a problemas de proporcionalidad simple. Esta inexistencia fue claramente puesta en evidencia por una experiencia que se llevó a cabo con profesores universitarios y de Secundaria españoles y franceses a los que se les plantearon cinco problemas clásicos de proporcionalidad compuesta del tipo:

> *Los gastos de un colegio ascienden a 50.000 ptas. para mantener 100 alumnos durante 15 días. Suponiendo que el gasto es proporcional al número de alumnos y al de días, ¿cuál será el gasto en 45 días si el pensionado aumenta en 20 alumnos?*
>
> *26 hombres, trabajando 8 horas cada día durante 3 días hacen 720 m de un tejido. Se supone que la longitud de tejido producido es proporcional al número de trabajadores, al número de días y al número de horas trabajadas cada día. ¿Cuántos metros del mismo tejido harán 14 hombres, en 6 días, trabajando 7 horas cada día?*

Como se muestra en el trabajo de Bosch (1994), prácticamente ninguno de los profesores interrogados reducía los problemas planteados a problemas de proporcionalidad simple directa mediante la consideración de magnitudes compuestas no explícitamente formuladas por el

[16] [1]Ver, por ejemplo, el trabajo de Whitney (1968) que propone una teoría matemática suficiente para elaborar toda un "álgebra de las magnitudes". Aunque, si nos situamos en un nivel teórico más cercano al de la Enseñanza media, bastaría con la sugerente propuesta de Freudenthal (1973).

enunciado: "los gastos son directamente proporcionales al producto del número de alumnos y de días", "la longitud de tejido es directamente proporcional al producto hombres $\times$ horas $\times$ días". Los únicos productos de magnitudes que se manejaron fueron, precisamente, aquellos que tenían una interpretación cultural simple: por ejemplo, el número de horas $\times$ días se sustituía por "total de horas trabajadas". La imposibilidad de considerar las magnitudes compuestas que no tienen una interpretación cultural condujo así a estos profesores a utilizar técnicas mucho más costosas de las que esperaban los investigadores, elaboradas con materiales ubicados únicamente en el primer nivel de algebrización. La unificación que resulta del segundo nivel de algebrización no es posible en la organización escolar actual, como tampoco era posible en la organización escolar clásica, fundada en una teoría cultural de las magnitudes que no podía incluir la mayor parte de los productos ni de cocientes de magnitudes.

3.2.3. El tercer nivel de algebrización: La modelización funcional general

A pesar de las restricciones culturales que pesaban sobre la organización clásica escolar, la evolución del trabajo matemático "sabio" condujo muy pronto a considerar magnitudes "complejas" (obtenidas como producto de potencias racionales de otras magnitudes más "simples") que se trataban como directamente o inversamente proporcionales a otras magnitudes. La proporcionalidad era la relación entre magnitudes por excelencia que permitía expresar muchos tipos de relaciones funcionales. Se decía, por ejemplo, que la fuerza con la que se atraen dos masas es inversamente proporcional al cuadrado de la distancia que las separa, que los volúmenes de las esferas son directamente proporcionales a los cubos de sus radios, que los periodos de los péndulos simples son directamente proporcionales a las raíces cuadradas de sus longitudes, etc.

El desarrollo del segundo nivel de algebrización, motivado por esta necesidad de modelizar sistemas cada vez más complejos, hace aparecer muy rápidamente la relación de proporcionalidad como *una relación muy particular al lado de muchas otras posibles*: relaciones cuadráticas, polinómicas, irracionales, etc. Aparece en efecto un cambio en el cuestionamiento previo al trabajo de modelización. En lugar de preguntarse "qué pares de magnitudes (compuestas) son proporcionales", la cuestión va evolucionando hacia "qué tipo de relación se puede establecer entre dos magnitudes dadas". Ya no diremos que los periodos de los péndulos simples son directamente proporcionales a las raíces cuadradas de sus longitudes, sino que escribiremos: $T = k \cdot \sqrt{l}$ y nos interesaremos por la relación entre T y l.

Se puede prever entonces –y esto es, efectivamente, lo que pasó históricamente– que el segundo nivel de algebrización formará parte de un proceso de algebrización más general que evolucionará hacia un proceso de *modelización funcional general* que permitirá describir relaciones más complejas entre magnitudes. Surgirá así un tercer nivel de algebrización como respuesta a un cuestionamiento tecnológico relativo a una práctica matemática en desarrollo. En este tercer nivel se puede prescindir de la teoría de las magnitudes como componente tecnológico-teórico siempre y cuando se disponga de una teoría matemática rigurosa de los *números reales* como medidas de las magnitudes continuas que intervienen en las situaciones estudiadas. La nueva organización así construida puede entonces adoptar, como marco teórico principal, la teoría algebraica y diferencial de funciones reales de variable real.

3.3. Algebrización progresiva de las organizaciones consideradas

Una vez presentados los tres niveles de algebrización progresiva de la organización matemática clásica en torno a la proporcionalidad de magnitudes, mostraremos brevemente que, en efecto, se trata de organizaciones cada vez más algebrizadas.

En lo que se refiere a los dos rasgos generales característicos de las modelizaciones algebraicas, **RMA1** y **RMA2**, podemos decir que el primer nivel de algebrización *—modernización del lenguaje técnico—* satisface parcialmente **RMA1**, porque modeliza materialmente cada una de las técnicas matemáticas, aunque sea aisladamente, de la organización clásica, pero no satisface **RMA2** porque no modeliza íntegramente y de manera conjunta la totalidad de los componentes de la organización matemática clásica en torno a la proporcionalidad de magnitudes. En este primer nivel, la modelización no alcanza los elementos tecnológico-teóricos. Sólo a partir del segundo nivel de algebrización *—la reducción a la función lineal—* que, repitámoslo, está ausente tanto en la Enseñanza Secundaria como en la Universitaria, se modelizan también los componentes tecnológico-teóricos y, por tanto, se satisface **RMA2**. En el tercer nivel de algebrización *—modelización funcional—* que sí aparece en la Enseñanza Universitaria- se tiene asimismo una modelización completa, pero a un nivel "superior" en el que ya no se precisa de la teoría de las magnitudes porque se dispone de una teoría de los números reales y de las funciones reales de variable real.

Como consecuencia de lo anterior, vamos a mostrar que, a medida que avanzamos en los niveles de algebrización, los diferentes indicadores: **IGA1**, **IGA2**, **IGA3** e **IGA4** se van satisfaciendo de forma creciente y progresiva:

— **IGA1**. *Manipulación de la estructura global de los problemas*. Es evidente que al pasar del primer nivel de algebrización, en el que se mantiene la distinción -tanto teórica como técnica- entre los problemas de proporcionalidad directa e inversa, simple y compuesta, al segundo, en el que todas las variables pueden jugar indistintamente el papel de "incógnitas" o de "parámetros", se produce un avance significativo en este indicador. En el tercer nivel de algebrización se produce una gran ampliación del tipo de problemas de los que se puede manipular la estructura global.

— **IGA2**. *Tematización de las técnicas y nueva problemática al nivel tecnológico*. Ya se satisface parcialmente en el primer nivel de algebrización. En efecto, la escritura de las relaciones permite plantear nuevas cuestiones tecnológicas relativas a cada una de ellas. Por ejemplo, de una relación del tipo $xy = z$ entre las cantidades correspondientes de tres magnitudes M, M' y M'', se puede deducir una proporcionalidad directa entre las magnitudes M y M'' cuando se fija el valor de y, o una proporcionalidad inversa entre M y M' cuando se fija el valor de z. Pero este cuestionamiento se amplía en los sucesivos niveles de algebrización. En el segundo nivel de algebrización este indicador se satisface más plenamente puesto que pueden plantearse cuestiones tecnológicas nuevas como, por ejemplo: ¿Cómo cambia la constante de proporcionalidad k y el papel de las restantes variables si en el problema anterior tomamos X_1 (o X_n) como variable dependiente e Y como variable independiente? ¿Cómo debe modificarse la técnica descrita para que no sea preciso calcular explícitamente la constante k? ¿Cuál es el dominio de validez de la técnica descrita? ¿Puede aplicarse a problemas que no sean de proporcionalidad?

— **IGA3**. *Unificación y reducción de los tipos de problemas, técnicas y tecnologías*. En el primer nivel de algebrización el lenguaje algebraico aparece como una taquigrafía del discurso y simbolismo aritméticos, pero no alcanza a reducir la complejidad conceptual de la organización clásica, ni mejora significativamente la eficacia de las técnicas. Por el contrario, en los sucesivos niveles de algebrización se produce una completa unificación y, por tanto, reducción (ostensiva y no-ostensiva) de los tipos de problemas, técnicas y tecnología. En el tercer nivel de algebrización la unificación de las técnicas y la reducción de objetos ostensivos está relacionada con los instrumentos de la teorías algebraica y diferencial de funciones reales de variables reales.

— **IGA4**. *Emergencia de problemas independientes del sistema modelizado*. En el primer nivel de algebrización, al explicitar materialmente la relación de proporcionalidad, empiezan a emerger problemas independientes del sistema modelizado. Se pasa, en efecto, de una descripción clásica que pone en juego necesariamente una relación entre 4 términos (dos pares), a una descripción en la que sólo aparecen 3 términos: las dos variables relativas a las dos magnitudes proporcionales y la "constante de proporcionalidad". En el segundo nivel de algebrización emergen nuevos tipos de problemas independientes de la organización matemática clásica en torno a la proporcionalidad (como, por ejemplo, los problemas relativos a las funciones homogéneas de grado más o menos uno). En el tercer nivel de algebrización, aparecen muchos más tipos de problemas independientes de los sistemas proporcionales.

3.4. La proporcionalidad en la ESO: Una algebrización desigual

Hemos presentado hasta aquí la algebrización hipotética de la organización matemática clásica en torno a la proporcionalidad, proceso que tomamos como *modelo epistemológico de referencia*. Utilizaremos ahora este modelo para describir el tipo de ingredientes praxeológicos que componen la actual organización matemática escolar en torno a la proporcionalidad de magnitudes –y que, para abreviar, designaremos mediante el símbolo OM (Pro)–. Mostraremos que, de acuerdo con nuestra hipótesis general sobre los fenómenos transpositivos, para explicar la estructura de las organizaciones matemáticas escolares existentes en un momento histórico concreto y en una institución concreta, debemos tener en cuenta que *la transposición didáctica actúa* *sobre organizaciones matemáticas en proceso de algebrización*, reconstruyendo elementos tanto de la organización que hace el papel de "sistema a modelizar", en este caso es la organización clásica en torno a la proporcionalidad, como de las que funcionan como modelos más o menos algebraicos de ésta. El análisis de los documentos curriculares oficiales y de algunos libros de texto de gran difusión pondrá de manifiesto que, en un "tema" del currículum actual como el de "la proporcionalidad de magnitudes", aparecen entremezclados elementos provenientes de diversas organizaciones matemáticas que se encuentran en distintos "estados de algebrización", al tiempo que, sin justificación aparente, otros elementos están ausentes.

Esta mezcla de componentes de distintas organizaciones matemáticas (con problemáticas, tipos de problemas, técnicas y discursos tecnológico-teóricos diferentes) hace que sea especialmente complejo el trabajo de interpretar los contenidos curriculares actuales. De ahí la necesidad, para la didáctica de las matemáticas, de elaborar modelos epistemológicos de organizaciones matemáticas de referencia que sirvan de modelo teórico para describir las organizaciones empíricas que encontramos en las instituciones de enseñanza.

Centraremos el análisis de la organización matemática empírica (que aparece actualmente en la ESO en torno a la proporcionalidad) en la descripción e interpretación de dos fenómenos didácticos que consideramos centrales: la pervivencia de componentes de la organización clásica junto a la evitación del álgebra; y el aislamiento escolar de la relación de proporcionalidad.

3.4.1. *La pervivencia de componentes de la organización clásica y la evitación del álgebra*

Para empezar deberíamos clarificar cuál es el tipo de cuestiones a las que responde hoy día OM (Pro), nos preguntamos:

— ¿Cuál es la problemática que motiva su introducción en la enseñanza obligatoria actual?

  — ¿Se trata de la misma problemática clásica?

  — ¿Cómo se ha transformado dicha problemática en la actual OM (Pro)?

— ¿Ha incluido cuestiones provenientes de la organización algebrizada?

El análisis de algunos de los libros de texto de uso más extendido en la Enseñanza Secundaria española actual[17] muestra que la problemática a la que responde OM (Pro) no parece rebasar inicialmente la de la organización clásica. Se parte siempre de la consideración de *situaciones que ya se suponen proporcionales* y se define la relación de proporcionalidad a través de ejemplos, de manera implícita a partir de situaciones familiares. La mayoría de los autores parten de la consideración de parejas de magnitudes que varían de manera conjunta[18]:

> *Observa que todas las [actividades] mostradas tienen algo en común: cuando una de las magnitudes aumenta, la otra relacionada con ella crece igualmente; y cuando disminuye, la otra también lo hace.*

Y, en la consideración de este tipo de actividades, se presenta la relación de proporcionalidad como la herramienta por excelencia para resolver un tipo muy particular de problemas: los que piden determinar cantidades desconocidas a partir de cantidades conocidas, en una situación que se supone "de proporcionalidad". Como indica, casi delatándose, otro autor:[19]

> *A veces, entre las magnitudes se dan relaciones muy útiles en la resolución de problemas.*

Una vez considerado este gran tipo de problemas, las técnicas y tecnología asociada que la OM (Pro) propone, para su resolución, es todo el instrumental de la antigua teoría de las razones y proporciones. Una *razón* sigue siendo un cociente entre (cantidades de) magnitudes (*antecedente* y *consecuente*), que no hay que confundir con la *fracción* (que es simplemente un número que se obtiene como cociente entre dos números enteros); una *proporción* es una igualdad entre dos razones que consta de dos *medios* y dos *extremos*; se define el producto de razones; se enuncian las propiedades de las proporciones; *la regla de tres simple* directa; la regla de tres simple inversa; las series de razones y los *repartos proporcionales.*

---

[17] Ver, por ejemplo: Amigo *et al.*, 1994 y 1995, Bailo *et al.*, 1996a, 1996b, 1996c, Becerra *et al.* 1996, Colera *et al.*, 1997, Cristina y Pérez 1996a y 1996b, González *et al.* 1994, Pancorbo *et al.* 1996.
[18] Pancobro, L. et al. (1996, p. 108).
[19] Colera et al., 1997, p. 98.

Toda esta tecnología, así como las técnicas que de ella se derivan, permite que todo el trabajo matemático de resolución de problemas se mantenga en el universo de la proporcionalidad clásica, *evitando* en particular las manipulaciones algebraicas que lo conducirían directamente a lo que hemos presentado como el primer nivel de algebrización. Las proporciones, es decir las igualdades entre razones, no son ecuaciones algebraicas ni parecen mantener ninguna relación con ellas. No es extraño entonces encontrar en los manuales expresiones como las siguientes, acompañadas posteriormente de una fórmula algebraica que, como es de suponer, no se manipulará como tal:[20]

> *Si dos cantidades, a y b, son directamente proporcionales a otras cantidades, c y d, la suma (resta) de las primeras guarda la misma proporción respecto de la suma (resta) de las segundas.*
>
> *Un término medio es igual al producto de los dos extremos partido por el otro medio. […] Un término extremo es igual al producto de los medios partido por el otro extremo.*

Como es de esperar, la convivencia de este universo clásico con el del álgebra elemental planteará muchas dificultades. Así, por ejemplo, aunque se define el *tanto por ciento* como "una razón cuyo consecuente es 100"[21], a la hora de calcular porcentajes o de manipular fórmulas de matemática comercial, se evita el lenguaje de la organización clásica –de razones, proporciones, antecedentes, consecuentes, medios y extremos– para *identificar implícitamente la razón con la fracción* y utilizar de manera encubierta las manipulaciones algebraicas. Así, por ejemplo, a partir de la fórmula del interés simple, $I = \frac{C \cdot r \cdot t}{100}$ se dice lo siguiente:[22]

> [..]. también conviene resolver problemas inversos como calcular cuál fue la cantidad depositada en un banco si hemos cobrado 4000 ptas. de intereses al 5% al cabo de 8 años. Para resolver estos problemas habrá que pensar en las reglas de tres y los porcentajes; o bien en el hecho de que el procedimiento inverso de multiplicar es dividir ... o hacer esto en general (con letras) y memorizar nuevas fórmulas.

Se propone pues muy claramente (y se lleva a cabo posteriormente) una utilización de las razones entre cantidades de magnitud no sólo como fracciones numéricas, sino incluso como *expresiones algebraicas* (expresiones manipulables algebraicamente). Para encubrir esta

---

[20] Bailo *et al*,. 1996a, p. 8 y González *et al.*,1994, p. 66.
[21] González *et al* 1994, p. 70.
[22] Bailo *et al.,* 1996a, p. 12.

transgresión del universo de la proporcionalidad clásica, el texto citado sugiere efectuar la manipulación “en general (con letras)”, esto es, de una vez por todas, y “memorizar las nuevas fórmulas” que aparecerán. De esta forma las manipulaciones algebraicas se hacen invisibles a lo que contribuirá aún más la probable asignación al profesor de la responsabilidad de obtener efectivamente dichas fórmulas, quedando para el alumno el trabajo de utilizarlas como meros algoritmos de cálculo. Así, por ejemplo, el problema citado anteriormente[23]

> ¿Cuál fue la cantidad depositada en un banco si hemos cobrado 4000 pta. de intereses al 5% al cabo de 8 años?

puede resolverse con “reglas de tres”:

> Si en 8 años hemos recibido 4000 ptas., en 1 año recibiremos $\frac{4000}{8} = 500$ ptas.
>
> Si 500 pta. equivalen al 5% del capital, el capital completo (esto es el 100% del capital) será igual a $C = \frac{500 \cdot 100}{5} = 10000$ pta.

o bien con la fórmula que se obtiene, mediante manipulaciones algebraicas encubiertas, a partir de la fórmula anterior:

$$I = \frac{C \cdot r \cdot t}{100} \quad \Rightarrow \quad C = \frac{100 \cdot I}{r \cdot t}$$

Este encubrimiento de las manipulaciones algebraicas es una consecuencia de una de las restricciones didácticas (en la ESO) al proceso de algebrización: la *necesidad de preservar la inteligibilidad cultural* de una actividad matemática basada en la *“regla de tres”* (y en los porcentajes) que desaparecería, junto a gran parte del universo de la proporcionalidad clásica, si se permitiesen las manipulaciones algebraicas de las fórmulas.

En general, el estudio de las organizaciones “prealgebraicas” trata con uno o más sistemas *“concretos”* (esto es, culturalmente familiares) y con técnicas matemáticas (aritméticas, geométricas, gráficas, etc.) que aparecen con tal grado de naturalidad que llegan a adquirir una función *“autotecnológica”*, esto es, que no precisan ningún tipo de discurso justificativo ni interpretativo exterior. En el caso particular de OM(Pro) la técnica “culturalmente inteligible”, que se justifica por sí misma, es la

---

[23] Ibid.

"regla de tres". La restricción al proceso de algebrización proviene, entonces, de que el desarrollo de este proceso provocaría una ruptura con la actividad matemática prealgebraica y, por tanto, la substitución de un sistema "concreto" y de una actividad culturalmente inteligible, por otra mucho más opaca que requiere ser interpretada y justificada. Al mismo tiempo la inmersión del universo de la proporcionalidad en el de la modelización algebraica supondría, en cierto sentido, romper con la estructuración clásica de los problemas "de regla de tres" para insertarlos en una nueva clasificación basada en propiedades de los modelos ecuacionales utilizados: problemas "de primer grado", de "segundo grado", "racionales", "irracionales", etc.; problemas "con una incógnita", "con dos incógnitas", etc.

3.4.2. Aislamiento escolar de la relación de proporcionalidad

En el currículum de matemáticas de la Enseñanza Secundaria Obligatoria de la comunidad catalana aparece el siguiente objetivo terminal:

> Objetivo 14. *Descubrir la existencia de relaciones entre parejas de valores correspondientes a dos magnitudes en situaciones concretas y saberla expresar en los casos de proporcionalidad directa e inversa, dependencia afín y cuadrática, usando correctamente los conceptos y términos adecuados.*
> *Educación Secundaria Obligatoria, Área de Matemáticas*[24]

Si interpretamos este objetivo en sentido literal, podemos afirmar categóricamente que los tipos de problemas y las técnicas matemáticas que aparecen efectivamente en OM(Pro) *no* permiten, de ninguna manera, ni siquiera acercarse a dicho objetivo. En efecto, es prácticamente imposible encontrar en los textos de Secundaria problemas en los que, dados suficientes valores correspondientes a dos magnitudes en una situación concreta, por ejemplo, x = número de lápices vendidos por un comerciante; y = beneficio neto obtenido, se pida al alumno que construya una relación entre dichas magnitudes acorde con los datos, sobreentendiendo que las posibles relaciones son, al menos, las que se citan en el texto del objetivo anterior.

Al igual que en la organización clásica, en la práctica totalidad de los problemas que aparecen en OM(Pro) se dice explícitamente, o bien se

---

[24] Generalitat de Catalunya, 1993, p. 46

sobreentiende por cuestiones culturales o porque se ha dicho en problemas anteriores, que las magnitudes que aparecen son directa o inversamente proporcionales, por lo que *la cuestión del tipo de relación ni siquiera se plantea*. Pueden encontrarse unos pocos problemas introductorios en los que, de una forma casi retórica, se pretende que el alumno reconozca la relación de proporcionalidad entre dos magnitudes. Citaremos dos ejemplos sin reproducir las tablas respectivas:[25]

> En la tabla adjunta se relacionan la altura, en metros, de diferentes árboles de un bosque, con la longitud de la sombra, en metros, que arrojan a una determinada hora del día. ¿Son estas dos magnitudes directamente proporcionales? ¿Qué sombra arrojaría un árbol de 16 metros de altura?
>
> La tabla adjunta nos relaciona el número de tractores con el tiempo necesario para labrar una finca: ¿Cómo son entre sí las dos magnitudes? ¿Cuál es la constante de proporcionalidad?

Excepcionalmente, por fin, puede aparecer algún problema en el que se pregunta al alumno si entre dos magnitudes hay o no hay proporcionalidad y, en caso de haberla, de qué tipo de proporcionalidad se trata (directa o inversa). Citaremos un ejemplo:[26]

> *Estudia cuáles de las parejas de magnitudes siguientes se relacionan con proporcionalidad directa, cuáles con proporcionalidad inversa y cuáles no se relacionan proporcionalmente:*
>
> *a) La cantidad de pastel que toca a cada uno, si se hacen partes iguales, y el número de personas que resultan a repartir.*
>
> *b) El tiempo que tarda un alumno en hacer un examen y la nota que saca.*
>
> *c) El número de partidos que ha ganado un equipo de baloncesto y el número de partidos que ha perdido (recordar que, en baloncesto, no hay empates).*
>
> *d) La velocidad que llevan unos coches y el espacio que recorren, en un mismo tiempo.*
>
> *e) La recaudación total por entradas de una sesión de teatro y el número de personas que han asistido (todas las entradas son al mismo precio).*

Este es el conjunto más amplio de relaciones entre magnitudes en el que se sitúan los problemas de proporcionalidad en la ESO. No deberían sorprendernos, por tanto, las grandes dificultades con las que se encuentran los alumnos cuando se les propone (aunque sea

[25] Becerra et al., 1996 pp.57-58.
[26] Bailo, C. et al. 1996, p.22

excepcionalmente) que juzguen la *adecuación de un modelo matemático de proporcionalidad al sistema estudiado*. Dichas dificultades son una consecuencia lógica del aislamiento de las relación de proporcionalidad, analizado anteriormente. Incluso la frecuente confusión escolar, que ha llegado a convertirse en una *confusión cultural* habitual, entre magnitudes directamente proporcionales y magnitudes que crecen (y decrecen) conjuntamente, podría ser explicada por el citado aislamiento de la relación de proporcionalidad.

Podemos afirmar categóricamente que en la Enseñanza Secundaria actual, *la relación de proporcionalidad entre magnitudes aparece siempre aislada*, nunca se la considera al lado de otros tipos de relaciones entre magnitudes. Ni en los textos, ni en las prácticas docentes habituales, aparece nunca la tarea matemática de reconocer, entre un conjunto no trivial de relaciones funcionales posibles (que contenga la relación de proporcionalidad), cuál es la relación funcional entre dos magnitudes concretas.

Es evidente que este tipo de tareas requeriría un nuevo tipo de técnicas matemáticas y, sobre todo, provocaría un cambio importante del papel que juega la proporcionalidad en la Enseñanza Secundaria. El mundo relativamente cerrado de OM(Pro) debería desaparecer para integrarse en una organización matemática mucho más amplia en la que la relación de proporcionalidad entre magnitudes sería considerada como una relación funcional más, al lado de muchas otras relaciones funcionales posibles. Se produciría así una reestructuración importante del conjunto de organizaciones matemáticas que se estudian en la Secundaria obligatoria porque la *modelización funcional algebraica* pasaría a ocupar un papel central en dicho currículum.

Los datos y los análisis anteriores muestran, en resumen, que la organización matemática escolar actual en torno a la proporcionalidad, OM(Pro), presenta un fuerte carácter "prealgebraico" puesto que no alcanza ni siquiera el primer nivel de algebrización, situándose en un estadio intermedio entre éste y la organización clásica. Dichos datos también muestran que los diferentes componentes de OM(Pro) no están algebrizados de manera uniforme. Mientras perviven muchos elementos de la organización clásica que considera la proporcionalidad como una *relación entre magnitudes*, aparecen elementos del primer nivel de algebrización (por ejemplo expresiones del tipo $y = k\,x$) que tratan la proporcionalidad como una *relación entre variables numéricas* eliminando completamente las magnitudes. Pero esta *algebrización* *parcial* que proporciona el lenguaje funcional no alcanza en ningún caso los componentes técnico-prácticos de OM(Pro): se describe "funcionalmente" la relación de proporcionalidad como una relación entre dos series de números, pero los problemas y las técnicas utilizadas se mantienen muy cercanos al universo de las "reglas de tres". El fenómeno que hemos descrito de la *"evitación del álgebra"* es un síntoma bastante espectacular de esta heterogeneidad.

El resto de datos empíricos de que disponemos no hacen más que corroborar esta tesis. Así, por ejemplo, el *aislamiento escolar de la relación de proporcionalidad* puede ser interpretado como una consecuencia de esta *algebrización desigual* que dificulta enormemente el proceso de algebrización progresiva de OM(Pro) que debería llevarse a cabo a lo largo de la Enseñanza Secundaria y desembocar en la modelización funcional.

Incluso el fenómeno de la *"numerización de la proporcionalidad"* que describe E. Comin en su reciente trabajo de tesis (Comin, 2000) relativo a la evolución de la enseñanza de la proporcionalidad en Francia (y que, sin duda, puede generalizarse al caso español), debe ser interpretado como una consecuencia de la *algebrización desigual de los componentes de* OM(Pro). En efecto, dado que la algebrización no alcanza las técnicas de esta organización, los problemas de proporcionalidad son considerados como "problemas aritméticos" (en el sentido de la "aritmética escolar" actual) y la relación de proporcionalidad pasa ahora de una *relación funcional entre variables* (*continuas*) a ser, simplemente, una *relación aritmética entre números*.

En un intento de ir más allá del caso particular de la organización OM(Pro), mostraremos en el último capítulo de esta memoria que muchas de las relaciones que se han establecido entre los componentes de la organización clásica en torno a la proporcionalidad y los de las sucesivas organizaciones algebrizadas que encontramos fragmentadas en la escuela, son una consecuencia de ciertas *restricciones transpositivas generales* que pesan sobre el *proceso de algebrización de todas las organizaciones matemáticas escolares.* Esta será, por tanto, una de las principales conclusiones de nuestro trabajo.

4. RESUMEN

En este capítulo hemos analizado, descrito e interpretado el proceso de algebrización (ya sea empírico o hipotético) de tres organizaciones matemáticas escolares; las que se han reconstruido o podrían reconstruirse en torno del "cálculo aritmético", la "divisibilidad" y la "proporcionalidad", respectivamente.

Hemos mostrado, en cada caso, las funciones didácticas que posee el proceso de algebrización: en el caso del *cálculo aritmético*, la algebrización de los programas de cálculo da "sentido" a la manipulación de *expresiones algebraicas*; en el de la *divisibilidad*, la modelización algebraica de las técnicas aritméticas permite integrar en una organización matemática *local* todas las organizaciones puntuales que vivían aisladas y relativamente separadas en la ESO; en el caso de la *proporcionalidad*, por fin, el modelo epistemológico de referencia que hemos elaborado –en términos de los tres niveles de algebrización progresiva de la organización matemática clásica en torno a la proporcionalidad de magnitudes– nos ha permitido mostrar que para explicar la estructura de las organizaciones matemáticas "empíricas" (efectivamente construidas en las instituciones docentes) es imprescindible tener en cuenta que la transposición didáctica no actúa sobre objetos matemáticos aislados, sino sobre organizaciones matemáticas "locales" e incluso "regionales" que evolucionan siguiendo un proceso de matematización e integración crecientes y, en particular, un proceso de algebrización. En este caso, la hipotética algebrización de la OM en torno a la proporcionalidad permitiría superar el aislamiento escolar de la relación de proporcionalidad (situándola en el ámbito de la modelización funcional) y, por tanto, modificaría profundamente las posibles formas de estudiar la proporcionalidad en la ESO.

CAPÍTULO VI

LA TRANSPOSICIÓN DIDÁCTICA DE ORGANIZACIONES MATEMÁTICAS EN PROCESO DE ALGEBRIZACIÓN: CONCLUSIONES Y PROPUESTA DE NUEVOS PROBLEMAS

1. EL PROCESO DE ALGEBRIZACIÓN Y LA TRANSPOSICIÓN DIDÁCTICA

En este trabajo hemos caracterizado inicialmente el *álgebra escolar* como un instrumento de la actividad matemática cuya utilización más o menos sistemática y completa en la reconstrucción escolar de las organizaciones matemáticas otorga a éstas un mayor o menor *grado de algebrización*. Por otra parte, y dado que toda actividad matemática –incluyendo la que tiene lugar en las instituciones docentes– acaba apareciendo como una actividad plenamente algebrizada, hemos postulado la existencia de un *proceso de algebrización* de las matemáticas que afectará tanto a las matemáticas sabias como a las matemáticas enseñadas. Hemos mostrado que dicho proceso de algebrización provoca una profunda reorganización de las organizaciones matemáticas que incluso puede llegar a convertir el instrumento algebraico en un objeto de estudio en sí mismo y que, en todo caso, cambia el *tipo de estudio* que es posible llevar a cabo con dichas organizaciones.

En esta situación, ¿cómo podemos describir el papel que juega la transposición didáctica en la reconstrucción de las organizaciones matemáticas escolares más o menos algebrizadas? ¿De qué forma incidirán los fenómenos transpositivos sobre el propio proceso de algebrización de las matemáticas escolares? ¿Cómo se manifestará su influencia sobre las actuales organizaciones matemáticas que se estudian en la ESO como, por ejemplo, en el caso de OM(Pro)?

Cualquiera que sea la respuesta que demos a estas cuestiones tendrá que tomar en consideración nuestra hipótesis sobre el tipo de "objetos" sobre los que actúa la transposición didáctica. Recordemos que según nuestra hipótesis, la transposición didáctica actúa sobre organizaciones matemáticas que tienen una estructura compleja y que, además, están en proceso de integración creciente y, en particular, en proceso de algebrización. Éste será precisamente el objetivo principal de esta sección: llevar a cabo un *primer esbozo de análisis* de la *transposición didáctica de las praxeologías matemáticas en proceso de algebrización*. La ambición última de este tipo de análisis, que aquí inauguramos modestamente, es la de dar cuenta de importantes características de la estructura, la génesis y el desarrollo de las organizaciones matemáticas escolares, así como de las posibles formas de ser estudiadas en una institución determinada y, todo ello, a partir de las restricciones provocadas por la transposición didáctica.

Empezamos señalando que el proceso de algebrización de la matemática escolar en el ámbito de la ESO no coincidirá paso a paso, ni se desarrollará de forma "paralela" al desarrollo del proceso de algebrización de las organizaciones matemáticas "sabias". De hecho, existe una "desviación" o "distancia" entre la estructura y la dinámica —incluyendo la génesis y el desarrollo— de las organizaciones matemáticas "sabias" y las que son reconstruidas para ser estudiadas en la escuela (Chevallard, Bosch y Gascón, 1997, p. 141-147). Esta distancia entre las matemáticas enseñadas y el saber de referencia que las legitima puede ser interpretada, en parte, como una consecuencia de que la algebrización de las matemáticas escolares no es una imagen simplificada de la algebrización de las matemáticas "sabias". Esto no significa que los respectivos procesos de algebrización sean completamente independientes. Por el contrario, postulamos que en el análisis de la transposición didáctica de cualquier organización matemática, como por ejemplo de OM(Pro), deben tomarse como organizaciones de referencia las que han ido apareciendo a lo largo del proceso de algebrización de la organización matemática "sabia" de la que ésta proviene.

Para llevar a cabo el análisis de la transposición didáctica de una praxeología matemática cualquiera en proceso de algebrización, partiremos de una descripción provisional de las *restricciones transpositivas genéricas* y las utilizaremos, a continuación, para caracterizar las restricciones transpositivas que actúan de manera más específica sobre el proceso de algebrización.

De la teoría de la transposición didáctica se desprende la existencia de diferentes tipos de *restricciones genéricas* a las que está sometido el *saber enseñado* en el seno de cualquier sistema de enseñanza. Arsac (1988) basándose, naturalmente, en las primeras formulaciones de esta teoría que datan de Chevallard (1985a), considera tres tipos de *restricciones genéricas*. Actualmente, gracias a la noción de *niveles de determinación didáctica* podemos considerar ocho niveles de estructuración de la organización matemática y, en cada uno de ellos, se producen restricciones particulares sobre lo que será posible en el aula. En consecuencia hemos debido modificar substancialmente su formulación de las restricciones y hemos añadido un cuarto tipo para dar cabida al hecho que la transposición didáctica no actúa sobre objetos matemáticos aislados sino sobre organizaciones matemáticas que, además de tener una estructura y dinámica interna complejas, *están sometidas a un proceso de integración creciente* generado fundamentalmente por el cuestionamiento tecnológico.

Consideraremos cuatro grandes tipos de restricciones transpositivas genéricas, fuertemente relacionadas entre sí:

(1) Restricciones que provienen de la *representación institucional* del saber matemático que se enseña, de la manera como el alumno aprende, y de lo que comporta enseñar matemáticas. Dado que dicha representación institucional constituye el modelo epistemológico-didáctico de referencia y que el modelo epistemológico general de las matemáticas incide de forma significativa sobre las prácticas docentes (Gascón, 2001), este primer grupo de restricciones no son independientes entre si.

(2) Restricciones provocadas por la *necesidad de evaluar* la eficacia de los procesos de enseñanza y aprendizaje de las matemáticas en las instituciones didácticas. Esta necesidad tiende a provocar una *diferenciación* y *autonomización* interna del corpus enseñado, así como una mayor *algoritmización* del mismo con la consiguiente *pérdida de sentido funcional* del saber enseñado respecto al saber de referencia.

(3) Restricciones impuestas por el *tiempo didáctico* en diversos aspectos como, por ejemplo: la obligada disposición del saber enseñado en una *sucesión ordenada de ítems*; el *envejecimiento* del sistema de enseñanza que comporta la necesidad de reformas constantes; la *obsolescencia interna* del proceso didáctico, la exigencia de un *aprendizaje rápido*, o en un tiempo muy limitado, que puede llegar a la exigencia cultural del *aprendizaje instantáneo*; y, por último, las restricciones ligadas a la disponibilidad de la *memoria didáctica del sistema*.

(4) Restricciones que provienen de la necesidad de que todo *saber enseñado aparezca como definitivo* e *incuestionable*. Esta necesidad "didáctica" choca con la necesidad de la dinámica de todo proceso de estudio de retomar las organizaciones matemáticas estudiadas anteriormente para mostrar sus limitaciones y contradicciones, y para *reestructurarlas e integrarlas* en organizaciones cada vez más amplias y complejas. Esta reestructuración puede ser tan profunda que haga necesario "corregir" los efectos de una transposición anterior mediante una especie de proceso de "*destransposición*"

Recientemente Antibi y Brousseau (2000) han introducido la noción de *destransposición didáctica* ("*dé-transposition didactique*") para referirse a un proceso necesario para que evolucionen las concepciones escolares y personales en matemáticas. El nombre de "destransposición" proviene, al parecer, del efecto antagónico que tiene dicho proceso respecto de determinados efectos de la transposición:

> *Le passage d'une conception à une autre ne peut toujours se faire par une simple adjonction et une amalgame des nouvelles connaissances avec les anciennes, comme pourrait le faire espérer le modèle de la présentation axiomatique des théories mathématiques. Certes, il est nécessaire de construire les nouveaux objets de connaissance à l'aide des plus anciens. Mais, souvent, cette construction ne s'accomplit pas selon un enchaînement analogue à celui d'une démonstration. Parfois l'adaptation ou le remplacement de l'ancienne conception (qui conduit à des réponses inadéquates ou fausses) demande une profonde refonte des définitions, des habitudes et des formulations, que la transposition précédente peut contrarier* (Ibid, 2000, p. 21).

Pero, a pesar de su nombre, la destransposición no debe considerarse como un proceso distinto y con efectos simplemente opuestos a los de la transposición. Los propios autores citados reconocen más adelante que la destransposición debe ser considerada, en realidad, como un componente de la transposición didáctica:

> *Il est clair que la dé-transposition didactique apparaît principalement comme une composante d'une transposition didactique, et non comme un moyen antagoniste indépendent et externe*" (Ibid, p. 23).

Nosotros consideraremos que los fenómenos de destransposición didáctica constituyen un componente esencial de la transposición didáctica que se caracteriza por estar fuertemente restringido, en los sistemas de enseñanza, por la necesidad de que todo *saber enseñado aparezca como definitivo* e *incuestionable*.

Una vez descritos, a grandes rasgos, los cuatro tipos de restricciones transpositivas genéricas a que está sometido el saber enseñado, analizaremos cuál es la incidencia de cada uno de ellos sobre el *proceso de algebrización* y, consecuentemente, sobre el *grado de algebrización de las organizaciones matemáticas escolares*.

(1) El primer tipo de restricciones (relativas al modelo epistemológico dominante en la institución) provienen, en el caso del *álgebra escolar*, de la interpretación —dominante en la institución escolar y muy especialmente en la ESO— del *álgebra escolar* como una especie de "*aritmética generalizada*"

En el capítulo III hemos propuesto un modelo del *álgebra escolar* muy diferente al etiquetado como *"aritmética generalizada"*. Como ya hemos indicado, éste último modelo considera inicialmente el *álgebra escolar* como un *instrumento de modelización*, situándola en un nivel diferente y lógicamente más básico que la "aritmética" y la "geometría" de la ESO. Hemos completado este modelo postulando la existencia de un *proceso de algebrización de las matemáticas escolares* que produce organizaciones matemáticas cada vez más algebrizadas.

Además, postulamos que la interpretación del *álgebra escolar* como una especie de *aritmética generalizada* provoca restricciones del proceso de algebrización que inciden sobre la estructura de las organizaciones matemáticas escolares y sobre las prácticas docentes que es posible llevar a cabo con ellas. Así en concreto:

— la tendencia a presentar el *álgebra escolar* como una especie de “lenguaje algebraico” que prolonga y generaliza un presunto “lenguaje aritmético”;
— el peso excesivo de las actividades algebraicas “formales” en detrimento de las “funcionales”;
— el tratamiento de las ecuaciones como “igualdades numéricas” con algunos términos desconocidos;
— la presentación del álgebra en continuidad muy privilegiada y casi exclusiva al “marco aritmético de referencia” (en detrimento, entre otros, del marco geométrico);
— la tendencia a seguir identificando —tal como se hace en la aritmética escolar actual— la resolución de un problema algebraico con la obtención de un número;

son algunos de los rasgos que provienen del modelo epistemológico dominante citado y que condicionan fuertemente no sólo la realidad matemática escolar en torno del “álgebra” sino, sobre todo, las posibles formas de estudiar esa realidad en la ESO. Por ejemplo, las prácticas docentes tratan el *álgebra escolar*, desde su primera aparición en segundo de ESO (13 años), como una organización matemática presuntamente estudiable en sí misma al mismo nivel lógico que la “aritmética” y la “geometría”, descuidándose completamente su *carácter inicial de instrumento de la actividad matemática*.

Como ya hemos señalado, esta incidencia tan importante del modelo epistemológico del *álgebra escolar* sobre las prácticas docentes nos permite considerarlo como un elemento esencial de la *tecnología didáctica*, esto es, del discurso, generalmente implícito, que sirve para describir, justificar, interpretar y hasta generar muchas de las *técnicas didácticas* que configuran la práctica docente en torno al “álgebra” en la ESO:

> En el caso particular de la organización OM(Pro) el modelo dominante de la “aritmética generalizada”, comporta que los problemas de proporcionalidad sean tratados en la ESO como problemas aritméticos en el sentido de la aritmética escolar actual, esto es, problemas que se resuelven mediante una cadena de operaciones aritméticas (que suelen reducirse a dos), cuyos cálculos y resultados intermedios han de poder interpretarse en términos del sistema y cuyo resultado final debe ser siempre un número concreto. De esta forma se *numeriza* el ámbito de la proporcionalidad y tiende a *aislarse del resto de relaciones funcionales*

por la sencilla razón de que no se la toma como una *relación funcional entre variables*, sino como una *relación aritmética entre números*.

(2) Dado que las técnicas de modelización están entre las técnicas matemáticas menos visibles, menos “algoritmizables”, menos “atomizables” y, en definitiva, *más difícilmente evaluables,* las restricciones originadas por la *necesidad de evaluar* la eficacia de los procesos de enseñanza y aprendizaje de las matemáticas, dificulta de manera muy decisiva aquellas actividades matemáticas involucradas en el proceso de algebrización porque tiende a restringir la utilización sistemática del instrumento algebraico como instrumento de modelización matemática.

Esta restricción ecológica impide que el instrumento algebraico viva con normalidad en las instituciones didácticas, muy especialmente en la ESO, lo que limita el carácter algebraico de sus organizaciones matemáticas. Lo anterior no implica que todas las manifestaciones de la *pérdida de sentido funcional* del *álgebra escolar,* como son: la *algoritmización* y la *atomización*, así como la aparición de *creaciones didácticas* (esto es, de tipos de tareas y técnicas algebraicas escolares que no se corresponden con el saber algebraico de referencia), sean completamente explicables por este tipo de restricciones. En efecto, el análisis llevado a cabo por Chevallard (1986b) de la *ecología de lo algebraico en los sistemas didácticos,* puso de manifiesto que la “desintegración del corpus algebraico” no puede explicarse únicamente como un caso particular del fenómeno transpositivo general de diferenciación y autonomización interna del saber enseñado; es preciso tomar en consideración un factor de origen cultural, exterior al propio sistema de enseñanza. Se trata de la *peyoración cultural del álgebra* que, a su vez, es una consecuencia del *logocentrismo* propio de la cultura occidental (Bosch y Chevallard, 1999).

Aparece aquí, por tanto, otro gran tipo de restricciones genéricas a las que está sometido el *saber enseñado* en el seno de cualquier sistema de enseñanza: el *juicio cultural* emitido sobre las organizaciones matemáticas potencialmente estudiables en una institución didáctica dada. En el caso del *álgebra escolar* dicho juicio incide significativamente sobre las prácticas docentes puesto que, al considerar los formalismos científicos y, muy en particular el *lenguaje algebraico*, como meros productos secundarios de un pensamiento que se expresaría primariamente por la *voz* y la *palabra*, se limitan enormemente aquellas prácticas docentes que tiendan a potenciar el desarrollo de un *momento exploratorio esencialmente escrito*. En el estudio de una organización algebrizada el *momento exploratorio* debe tener forzosamente un carácter "material": la exploración algebraica no se lleva a cabo con el "pensamiento" ni únicamente con la "palabra", se realiza mediante manipulaciones esencialmente *escritas*, esto es, *calculando.*

En el caso particular de la organización OM(Pro) esta peyoración del lenguaje algebraico contribuye a potenciar el curioso fenómeno de la *evitación de las técnicas algebraicas* que hemos descrito anteriormente y propicia el carácter autotecnológico de la "regla de tres" que, al considerarla como una expresión directa del pensamiento, debe expresarse mediante el lenguaje verbal (oral o escrito).

(3) Las restricciones ligadas al *tiempo didáctico* están muy relacionadas con los restantes tipos de restricciones y también tienen una incidencia muy importante sobre el proceso de algebrización. Destacaremos a continuación tres aspectos de dicha incidencia:

(a) La *obsolescencia* interna del proceso didáctico provoca la exclusión de aquellos componentes o elementos de las organizaciones matemáticas escolares que aparecen como más obsoletos o desfasados, al tiempo que otros elementos de dichas organizaciones permanecen en la institución. Este fenómeno de *obsolescencia selectiva* entorpece el proceso de algebrización que, por definición, debe afectar de manera integral a todos los componentes de la organización matemática.

(b) Dado que el proceso de algebrización parte de una organización matemática que hace el papel de sistema potencialmente modelizable, se requiere un estudio previo de ésta que ponga de manifiesto la necesidad de "completarla" en algún sentido. Teniendo en cuenta que dicho estudio pudo ser realizado en otra clase (u otra *comunidad de estudio*) y bajo la dirección de otro profesor, aparecen restricciones para llevar a cabo la modelización algebraica debidas a la *disponibilidad de la memoria didáctica del sistema* (Brousseau y Centeno, 1991).

(c) Muy relacionadas con estas restricciones aparece la necesidad de tomar en consideración *objetivos a largo plazo* que permitan estudiar el sistema de partida, cuestionarlo, llevar a cabo todas las etapas del proceso de algebrización y "dar tiempo al tiempo" para poner a punto y flexibilizar el complejo de técnicas que constituyen el instrumento algebraico. Pero esta condición que podríamos asimilar a la "paciencia epistemológica", y que es imprescindible para llevar a cabo el proceso de algebrización de manera funcional, choca con la exigencia de un *aprendizaje rápido* e incluso *instantáneo* provocando nuevas restricciones a la posibilidad misma de llevar a cabo, en el ámbito escolar, procesos de algebrización completos, explícitos y suficientemente detallados. Es la ficción del aprendizaje "instantáneo", en tiempo real, denunciada por Chevallard, Bosch y Gascón, 1997, p. 297).

En la reconstrucción escolar de la organización OM(Pro), en la década de los setenta, se produjo un fenómeno de *obsolescencia selectiva.* La reforma de las "matemáticas modernas" expulsó, por obsoletos, numerosos elementos teóricos y tecnológicos de la organización matemática clásica en torno a la proporcionalidad de magnitudes (en particular, la teoría de razones y proporciones), pero sin eliminar al mismo tiempo ni las técnicas elementales ni los tipos de problemas que, de hecho, constituían el germen y la razón de ser de dicha organización. De esta manera se produjo en OM(Pro) una pervivencia del bloque técnico-práctico de la organización clásica que quedaba aislado y huérfano de un discurso tecnológico-teórico adecuado.

Dado que la "*praxis*" no puede subsistir durante mucho tiempo en una institución sin un "*logos*" que la explique y justifique, se empezaron a utilizar las nociones de "función de proporcionalidad directa" y "función de proporcionalidad inversa" para dar algún tipo de interpretación y justificación a la proporcionalidad simple. Esta aparición (local y marginal) del lenguaje funcional en la organización OM(Pro) contribuyó a eliminar de ésta todo rastro de las magnitudes.

(4) El cuarto tipo de restricciones transpositivas inciden también muy directamente sobre el proceso de algebrización en cuanto que éste es un proceso de reorganización de las organizaciones matemáticas. En efecto, la necesidad de que todo saber enseñado *aparezca como definitivo* e *incuestionable* impide que éste muestre sus limitaciones y contradicciones y, por tanto, desaparece la necesidad de reestructurar, modificar, corregir e integrar las organizaciones matemáticas estudiadas en otras más amplias y complejas.

Si bien es cierto que este tipo de restricciones dificulta todo tipo de cuestionamiento relativo a las organizaciones matemáticas previamente estudiadas, podríamos decir que el *cuestionamiento tecnológico,* motor del proceso de algebrización, queda especialmente "mermado" por dos razones:

(a) Por una parte el cuestionamiento tecnológico es *didácticamente muy costoso* porque comporta cambiar la "manera de hacer" que ha sido aprendida con un coste más o menos alto. Es por ello que el sistema "protege" a las técnicas matemáticas institucionalizadas eliminando aquellas tareas que podrían poner en evidencia sus limitaciones. En estas condiciones es muy difícil poner en tela de juicio el *alcance*, la *justificación*, la *interpretación* y hasta la *eficacia relativa* de unas técnicas que han demostrado hasta el momento su validez.

(b) Por otra parte el cuestionamiento tecnológico es potencialmente *muy traumático* porque al abrir la controversia sobre las técnicas, cuyo funcionamiento es el germen de toda la organización matemática, puede provocar un cambio radical en ésta. De hecho, las modelizaciones algebraicas que resultan del cuestionamiento tecnológico pueden dar origen, como hemos visto, a organizaciones inesperadamente alejadas de la organización de partida hasta el punto que pueden llegar a tomar vida propia.

En el caso particular de la organización OM(Pro) podríamos hablar de dos aspectos del posible *cuestionamiento de la* "*regla de tres*" como técnica paradigmática. El *cuestionamiento interno* que pondría en entredicho, dentro del propio ámbito de la proporcionalidad, *por qué* la "regla de tres" *es correcta*, y el *externo* que debería hacerse desde un ámbito mucho más amplio que la proporcionalidad que incluyera, junto a la relación de proporcionalidad las relaciones "afín", "cuadrática", "cúbica" y determinadas relaciones "racionales" elementales.

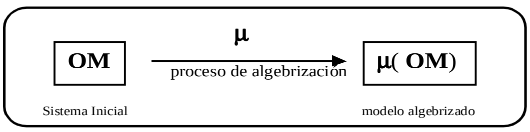
El cuestionamiento interno está protegido por la inteligibilidad cultural de la "regla de tres", por su carácter aritmético elemental que la hace susceptible de la ilusión del "*aprendizaje instantáneo*" y, en definitiva, por el fuerte *carácter autotecnológico* que todo ello comporta. El cuestionamiento externo es más radical y hace referencia a poner en tela de juicio la *adecuación de la relación de proporcionalidad* a una situación dada. Este cuestionamiento requeriría romper el *aislamiento escolar efectivo de la relación de proporcionalidad* para situarla en el ámbito de un conjunto amplio de posibles relaciones funcionales.

2. EL PROCESO DE ESTUDIO DE LAS ORGANIZACIONES MATEMÁTICAS ALGEBRIZADAS

Enunciaremos brevemente algunas de las consecuencias inmediatas que se desprenden de los análisis anteriores, y que hacen referencia a las características requeridas por el *proceso de estudio* de las organizaciones matemáticas en proceso de algebrización. Mostraremos de esta manera la profunda dependencia entre *lo matemático* –las organizaciones estudiadas– y *lo didáctico* –el estudio de dichas organizaciones–.
No olvidar , sin embargo, que algunas de estas características del *proceso de estudio* necesitarían, para ser viables en nuestro sistema de enseñanza, un cambio de las restricciones culturales, sociales, económicas y políticas a las que está sometido actualmente dicho sistema, y que no están únicamente dentro de la competencia específica de la didáctica de las matemáticas.

El estudio de organizaciones matemáticas en proceso de algebrización requiere, ante todo, *llevar a cabo* una *actividad de modelización matemática*. A un nivel elemental esto significa que el *proceso de estudio mínimo* incluye: el estudio de una organización matemática, OM, que juegue el papel de "sistema" inicial; la utilización del "instrumento algebraico" para modelizar dicho sistema; y el estudio del "modelo algebraico" obtenido, μ(OM), así como las consecuencias de los resultados obtenidos sobre el sistema de partida.

En el horizonte de las investigaciones relativas a este tipo de procesos de estudio deberá estar la ambición de analizar no sólo un proceso aislado de modelización algebraica, sino *la génesis y el desarrollo* (limitado) *de una organización matemática mediante sucesivos procesos de algebrización*. Este tipo de análisis no debe confundirse con el análisis del desarrollo histórico de las organizaciones matemáticas.



Para llevar a cabo un proceso de estudio de esta naturaleza se requiere una *organización didáctica* con características específicas. Señalaremos a continuación algunas de estas características en términos de los *momentos didácticos* (Chevallard, 1999), restringiéndonos al caso elemental de una modelización algebraica aislada:

(1) En el momento del *primer encuentro* deben aparecer algunos de los tipos de tareas constitutivos de OM y, también, algunos de los tipos de tareas que se pueden formular en términos de OM pero cuya problematicidad provocará la necesidad de "ampliar" esta organización con un modelo de la misma. El profesor tiene que poner en marcha *técnicas didácticas* que permitan que el estudiante manipule *efectivamente* dichas tareas que serán la razón de ser de la futura ampliación, μ(OM), de OM.

(2) Ya hemos justificado que el momento *exploratorio* de una organización matemática algebrizada debe tener un carácter "material", no puede reducirse a la mera "exploración mental". La exploración debe llevarse a cabo mediante manipulaciones esencialmente *escritas*, esto es, *calculando.* Por lo tanto, para poder dirigir y gestionar adecuadamente un proceso de estudio que abarque OM y μ(OM) sería necesario que existiese un dispositivo didáctico en el que pudiese vivir y desarrollarse con normalidad el *carácter manipulativo escrito del momento exploratorio* (Bosch y Gascón, 1994).

(3) En el momento del *trabajo de la técnica* debe provocarse de manera ineludible la necesidad de cuestionar la *eficacia*, el *alcance* y hasta la *justificación* de las técnicas inicialmente válidas en OM. Para ello será preciso que en OM aparezcan problemas situados en la frontera del dominio de validez de las técnicas de OM. Este *cuestionamiento tecnológico* será el motor del proceso de modelización que desembocará en la construcción de μ(OM). La modelización de las técnicas de OM producirá *nuevas técnicas*, más potentes, que sean útiles en μ(OM).

(4) El entorno *tecnológico-teórico* debe constituirse de manera que permita justificar, explicar y producir las técnicas iniciales, las nuevas técnicas y las relaciones entre ambas. Esto significa, en particular, que las *técnicas de modelización* también deben ser *descritas, justificadas* e *interpretadas.*

(5) En el momento de la *institucionalización* no debe prescindirse completamente de OM puesto que esta organización inicial contiene, en cierta manera, la razón de ser de μ(OM). También deben

institucionalizarse las técnicas de modelización potencialmente útiles en otros procesos. Aunque a la larga OM puede llegar a ser "matemáticamente contingente" y hasta prescindible, durante el proceso de estudio es, al menos parcialmente, "didácticamente necesaria".

(6) En el momento de la *evaluación* debe ponerse el acento en la evaluación de la *eficacia*, la *pertinencia* y la *fecundidad* de la *modelización algebraica* utilizada. ¿Ha ampliado adecuadamente los tipos de problemas de OM? ¿Ha producido técnicas (algebraicas) más eficaces y potentes que las de OM? ¿Ha unificado y simplificado los objetos ostensivos y no ostensivos? ¿Ha permitido justificar las técnicas que se utilizaban en OM?.

Dado que todas las organizaciones matemáticas escolares están de alguna manera inmersas en un proceso de algebrización, postulamos que las *organizaciones didácticas escolares,* esto es, la forma de organizar el proceso de estudio de las matemáticas escolares en las instituciones docentes, deben tender a transformarse en la dirección marcada por las características que hemos descrito brevemente en términos de los seis *momentos del proceso de estudio*.

3. SÍNTESIS DE LO PRESENTADO

Podemos sintetizar el trabajo presentado hasta aquí como la evolución de la respuesta que proporciona la didáctica de las matemáticas al problema del *álgebra escolar* que se plantea inicialmente en la institución de la Enseñanza Secundaria Obligatoria.

Las primeras cuestiones, a las que hacemos referencia en el capítulo I, se situarían en la problemática docente, fuente interesante de conflictos y de incertidumbres que el profesor debe resolver día a día. Sabemos que no hay recetas "milagrosas", aunque algunas opiniones de "expertos" docentes pretendan resolver los conflictos de la enseñanza y aprendizaje del *álgebra escolar* antes de entenderlos. Tenemos claro que en la búsqueda de soluciones no debemos confundir nuestros fines con nuestros deseos y los modos de conseguirlos. Los problemas docentes han constituido y constituirán el origen y la primera razón de ser de nuestro trabajo didáctico y el conocimiento y la mejora de los modelos docentes, el horizonte hacia el que caminamos. Nuestro *sistema inicial a estudiar* es, por tanto, la *institución escolar* y a ella debemos volver.

Estas primeras cuestiones, anteriormente citadas, han sido *problematizadas* por distintos *Programas de Investigación.* Destacamos en el primer capítulo de nuestro trabajo el *Programa Cognitivo* con sus sucesivas ampliaciones que han dado lugar a la *perspectiva cognitiva inicial*, la *conceptualista*, la *psicolingüística,* la *proceptualista* (APOS) y el *problema del significado* y el *Programa Epistemológico* con sus sucesivas perspectivas, la *teoría de las situaciones didácticas*, y la *teoría antropológica de lo didáctico*.

La reconstrucción hipotética de los componentes de ambos Programas de Investigación y, en particular, de las distintas teorías didácticas integradas en cada uno de ellos, es decir, el núcleo firme y la heurística positiva, nos ha permitido formular los *"problemas didácticos"* en el ámbito del *álgebra escolar.* Hemos mostrado así que cada teoría didáctica determina el tipo de problemas que se pueden formular, estudiar y resolver con los instrumentos que dicha teoría proporciona.

En ese momento nos encontramos con la necesidad de decidir en qué Programa de Investigación nos situábamos y, todavía más, que teoría didáctica utilizar. Siendo conscientes de que toda elección supone una renuncia, y que nos quedarán problemas muy interesantes sin poder abordar con nuestros instrumentos teóricos, nuestra opción se centra en la Teoría Antropológica de lo Didáctico (TAD), dentro del marco del Programa Epistemológico. La principal motivación en la elección de este marco teórico se fundamenta en la necesidad de cuestionarnos el propio conocimiento matemático y la transposición didáctica que de él se realiza en las instituciones escolares. Por ello, en el capítulo II, presentamos de forma detallada la necesidad de este nuevo Programa de Investigación y su evolución hasta la TAD. Nuestra contribución al estudio de la transposición didáctica de las OM en proceso de algebrización dentro del currículo de Secundaria es una aportación más hacia el conocimiento y la "posible mejora" del actual modelo docente.

De este modo, centrándonos en nuestro ámbito de estudio, el Programa Epistemológico nos obliga a cuestionar la naturaleza del *álgebra escolar* y para ello la TAD nos proporciona un modelo de *actividad matemática* en términos de *praxeologías* u *organizaciones matemáticas* y un modelo del *proceso de estudio* de las organizaciones matemáticas. Por ello, en nuestro trabajo nos hemos referido a los *problemas didáctico-matemáticos,* para no olvidar y hacer constar que el desarrollo de "lo matemático", en cualquier institución, está fuertemente vinculado con el desarrollo de “lo didáctico”, de los procesos de estudio (hablamos de *codeterminación* mutua).

Uno de los primeros trabajos exploratorios que realizamos fue la búsqueda y descripción de los componentes que podrían constituir una organización matemática escolar local —cuestión inicial, tarea y técnica— en torno al *álgebra escolar* en Secundaria Obligatoria. El no tener éxito en esta búsqueda nos ha obligado a pensar en una organización matemática *regional* en torno a la noción de *proceso de algebrización*.

Por ello ha sido necesario el capítulo III. En él construimos dos modelos epistemológicos para interpretar el *álgebra escolar*: uno el que denominamos *aritmética generalizada* y el que hemos llamado *proceso de algebrización* o *modelización algebraica*. Para éste, hemos tenido que definir la noción de proceso de algebrización, dentro de la modelización matemática e indicar sus rasgos más significativos, y según la presencia o no de ciertos indicadores establecemos la noción de *grado de algebrización* de una OM. El modelo de *aritmética generalizada* se aproxima a la interpretación dada en la cultura escolar a la noción de *álgebra elemental*. Caracterizamos ambos modelos presentando una relación detallada de las características más relevantes de cada uno de ellos, relación que será nuestra pauta en el estudio exploratorio que presentamos en el capítulo IV.

La vinculación existente entre la interpretación que la institución escolar da al álgebra y las explicaciones propuestas por distintos investigadores sobre las dificultades y conflictos de alumnos y profesores en la enseñanza-aprendizaje del *álgebra escolar*, hace ineludible un estudio empírico de la interpretación institucional, que permita discernir hasta qué punto es cierto que los conflictos y errores surgen esencialmente como consecuencia de generalizaciones erróneas de nociones establecidas en el marco de la aritmética y que éstos son debidos a la no existencia de una formalización adecuada de los métodos aritméticos. Es decir, por la enseñanza previa de la aritmética.

Este modelo dominante de la institución escolar, implícito, lo consideramos como un elemento tecnológico en la estructuración de la organización didáctica escolar relativa a la enseñanza del *álgebra escolar.*

Bajo el título de “un estudio exploratorio” y teniendo presentes las características de los modelos epistemológicos citados, presentamos, en el capítulo IV, en primer lugar, el análisis de los documentos y textos de mayor importancia y difusión en la institución de Secundaria Obligatoria, mostrando tanto la ausencia de una organización matemática en torno al álgebra, como la ausencia del álgebra como instrumento de modelización, lo que nos conduce a subrayar el carácter prealgebraico del actual currículum de la Enseñanza Secundaria Obligatoria.

En segundo lugar, el análisis de los precitados documentos y textos oficiales y las respuestas de los profesores a propósito de la problemática de la enseñanza del *álgebra escolar* reinciden en las características del modelo de aritmética generalizada. Por otra parte, el estudio exploratorio deja constancia de la insatisfacción de algunos profesores por la diferencia que existe entre lo que es posible hacer en relación a la enseñanza del álgebra en la ESO y lo que creen que deberían de hacer.

Mediante la reconstrucción hipotética de tres organizaciones matemáticas escolares queremos dejar constancia, en el capítulo VI, de lo que significa *la algebrización de organizaciones matemáticas*, es decir, el estudio de sistemas matemáticos a través del instrumento algebraico o proceso de algebrización y las funciones didácticas más importantes que se derivan de dicho proceso de estudio.

No se trata de proponer cómo se debe abordar el currículum relativo al *álgebra escolar* en la institución de Secundaria Obligatoria, sino de mostrar otra posibilidad de reconstruir determinadas OM en dicha institución, lo que modificaría profundamente las maneras de estudiarlas y podría dar respuesta a parte de los problemas y conflictos que hoy tienen los alumnos y profesores. La pertinencia o no de esta nueva forma de acometer el currículum de Secundaria Obligatoria requiere nuevas investigaciones.

4. FORMULACIÓN ACTUAL DEL PROBLEMA DIDÁCTICO DEL ÁLGEBRA ESCOLAR EN EL ÁMBITO DE LA TAD

Una de las consecuencias más importantes del *desarrollo de la teoría de la transposición didáctica* fue la necesidad de modelizar las *prácticas matemática institucionales* con instrumentos suficientemente finos como para permitir una descripción de dichas prácticas que hiciese posible el estudio de las condiciones de su realización. Esta modelización permitirá, en particular, operativizar las nociones de *relación institucional* (y *relación personal*) *al saber matemático* y ha sido abordada en los últimos desarrollos del enfoque antropológico (Chevallard, 1992, 1996, 1997 y 1999; Chevallard, Bosch y Gascón, 1997). Hemos denominado *Teoría Antropológica de lo Didáctico* (TAD) al estado actual de esta teorización que engloba y sistematiza todos los desarrollos anteriores del *enfoque antropológico*.

La TAD precisará, por tanto, explicitar un *modelo general de las matemáticas institucionales* que incluya la *matemática escolar* como un caso particular y un *modelo de las actividades matemáticas institucionales* que incluya la *enseñanza-aprendizaje escolar de las matemáticas*, como una actividad matemática institucional particular. Recordemos, también, que en los últimos desarrollos de la teoría antropológica se modeliza la *matemática institucional* mediante la noción de *organización* o *praxeología matemática* y las *actividades matemáticas institucionales* mediante la noción de *proceso de estudio de una organización matemática en el seno de una institución* o *praxeología didáctica*.

Utilizando estas nociones podemos generalizar el problema del *análisis de la estructura, el funcionamiento y la ecología de la relación institucional a lo algebraico*, que se planteaba en el ámbito del enfoque antropológico inicial, para formular uno de los *prototipos de los problemas de investigación didáctica* que se construyen en la TAD:

TAD. *Analizar los componentes* (*y las relaciones dinámicas entre ellos*) *de las* praxeologías matemáticas *que son propuestas para ser estudiadas en la escuela y de las que son efectivamente construidas en el aula. Analizar la estructura y la dinámica de las* praxeologías didácticas *del profesor y de los alumnos. Describir la ecología, o condiciones de existencia institucional, de dichas praxeologías.*

En el caso del *álgebra escolar*, la problemática creada en los últimos desarrollos de la TAD toma en consideración la estructura y la dinámica de las *praxeologías matemáticas* y *didácticas* que se han desarrollado alrededor de los objetos matemáticos que en la cultura escolar se consideran como objetos “algebraicos”. Queremos describir las *condiciones de existencia institucional de dichas praxeologías*.

Así, los nuevos instrumentos teóricos que proporciona la TAD han permitido reformular el *problema didáctico del álgebra escolar* en términos más cercanos a la actividad matemática misma lo que posibilita la construcción de problemas didácticos "nuevos", así como un tratamiento más sistemático y operativo de los mismos.

Enunciaremos a continuación algunos de estos nuevos *problemas de investigación didáctica*. Para cada uno de estos problemas hemos propuesto una primera *respuesta tentativa* que se deduce esencialmente del conjunto de nuestro trabajo. Cada una de dichas "respuestas" debe ser considerada como una conjetura o hipótesis provisional, con la intención de que sirva para clarificar el alcance del problema en cuestión.

TAD1. *El "álgebra escolar", ¿aparece en la ESO como una praxeología u organización matemática en sí misma o como un instrumento de estudio de otras praxeologías?*

El *álgebra escolar* no aparece en la Enseñanza Secundaria ni como una praxeología matemática bien delimitada y estructurada con todos sus componentes (tareas, técnicas, tecnologías y teorías), ni como un *instrumento de estudio* (que debería culminar en la *modelización algebraica*) de organizaciones previamente constituidas (Cap. IV). Partiendo de la base de que toda *actividad matemática* puede interpretarse como una *actividad de modelización*, hemos llegado a la conclusión de que el "álgebra escolar" debería aparecer inicialmente como un "*instrumento algebraico*" para dar origen, progresivamente, a organizaciones matemáticas cada vez más algebrizadas. Sólo posteriormente, alcanzado un cierto nivel de algebrización, el modelo algebraico puede independizarse del sistema de partida, tomar vida propia y hasta aparecer como una organización matemática en sí misma.

TAD2. *Utilizando la estructura de las organizaciones praxeológicas, ¿cómo se pueden caracterizar las modelizaciones algebraicas en el conjunto de modelizaciones matemáticas?*

Las modelizaciones algebraicas se caracterizan porque permiten modelizar explícita y materialmente las *técnicas matemáticas* que forman parte del sistema a modelizar (que, en el caso de las modelizaciones algebraicas, es un sistema matemático); porque sitúan el modelo algebraico que se obtiene en el *nivel tecnológico* de la organización matemática modelizada; y porque, *al modelizar íntegramente todos los componentes* de la organización matemática que hace el papel de sistema a modelizar, permiten considerar el modelo algebraico como una *extensión de la organización matemática inicial*. Tenemos, en resumen, que las modelizaciones algebraicas provocan un tipo de transformación de las organizaciones matemáticas modelizadas que denominaremos *proceso de algebrización* (Cap. III).

TAD3. *¿Qué relación hay entre las modelizaciones algebraicas y el grado de algebrización de las praxeologías matemáticas?*

Existe una dualidad entre las *organizaciones matemáticas algebrizadas*, de la que podemos dar un conjunto de indicadores, y las *modelizaciones algebraicas*, que hemos caracterizado como una modalidad básica dentro del conjunto de modelizaciones matemáticas. Esta dualidad refuerza la interpretación que hemos dado del "álgebra escolar", que debería aparecer inicialmente como una especie de *técnica matemático-didáctica*, en el sentido no algorítmico que la TAD da a este término y que debería estar cada vez más presente en las diferentes praxeologías matemáticas que constituyen la organización matemática escolar (Cap. III).

TAD4. *¿Cómo se transforman las praxeologías matemático-didácticas a lo largo del proceso de algebrizacion?*

El *proceso de algebrización* provoca un cambio radical de las *praxeologías matemático-didácticas*. Se manifiesta en una progresiva *integración* de los distintos componentes de la *praxeología matemática* que comporta la reducción drástica del material ostensivo utilizado y en una *ampliación* de la misma que puede ser interpretada, en cierto sentido, como una *completación relativa*. Paralelamente se produce un cambio en la *praxeología didáctica*, esto es, en las posibles formas de ser estudiada la praxeología matemática algebrizada en una institución determinada. Las transformaciones originadas por el proceso de algebrización pueden "observarse" tanto en la evolución histórica de las matemáticas como en la evolución del proceso de estudio "escolar" de las matemáticas a lo largo de los diferentes niveles educativos (Cap. V).

TAD5. *¿Cuál es el grado de algebrización de las praxeologías matemáticas que se estudian actualmente en la Enseñanza Secundaria?*

Después de describir los indicadores (IGA1—IGA4, -ver Cap. III-) del grado de algebrización de una organización matemática, hemos podido reformular en el capítulo IV el fenómeno de la *desalgebrización del currículum de la Secundaria Obligatoria*. En el capítulo V hemos analizado con detalle el *carácter problemático del proceso de algebrización* de algunas organizaciones matemáticas escolares y el consiguiente carácter *prealgebraico* de las mismas. Hemos mostrado, en síntesis, que las modelizaciones algebraicas están prácticamente ausentes en la Enseñanza Secundaria Obligatoria donde las organizaciones matemáticas aparecen muy débilmente -y sólo localmente- algebrizadas. En el capítulo V hemos mostrado que el estudio de organizaciones matemáticas algebrizadas en la ESO entraría en contradicción con ciertas cláusulas del actual contrato didáctico institucional. De esta manera hemos aportado nuevos argumentos, relativos a causas más específicas de la institución (que se sitúan en el *nivel escolar*) y más visibles desde el propio sistema de enseñanza de las matemáticas, para complementar la conocida hipótesis de la *peyoración cultural del álgebra* como causa general (situada a *nivel social*) de la desalgebrización del currículum (Chevallard, 1989a y 1989b).

TAD6. *¿Por qué, en la institución escolar de Secundaria, se tiende a identificar el "álgebra" con una obra que prolonga y generaliza unilateralmente la "aritmética escolar"? ¿Por qué la introducción al álgebra escolar siempre está ligada a la aritmética? ¿Cómo se relaciona este fenómeno, que podríamos denominar* "aritmetización del álgebra escolar" *con el fenómeno, aparentemente inverso, de la* "algebrización de la aritmética escolar moderna"*?*

Hemos mostrado que en la Enseñanza Secundaria se identifica el álgebra escolar con una especie de "*aritmética generalizada*" (Cap. IV). Hemos puesto de manifiesto que este modelo dominante del álgebra escolar tiende a identificar el álgebra escolar con el "simbolismo algebraico" que se opone, al tiempo que amplía y generaliza, un supuesto "lenguaje aritmético". Hemos propuesto un modelo alternativo del álgebra escolar basado en el patrón de Análisis-Síntesis en tanto que técnica matemático-didáctica (Cap. III). Hemos relacionado el fenómeno de la "aritmetización del álgebra escolar" con otros fenómenos matemático-didácticos como son: "la ausencia escolar de determinados aspectos de la disciplina matemática" y la "atomización del proceso de estudio en las instituciones escolares" (Cap. III y IV). La "*atomización del proceso de estudio en las instituciones escolares*" se refiere a un fenómeno cada vez más visible en los libros de texto y hasta en los documentos curriculares oficiales. Se trata de la tendencia a diluir la enseñanza de las matemáticas en un conjunto de anécdotas desconectadas entre sí.

TAD7. *¿Es posible algebrizar una praxeología matemática concreta en el Segundo Ciclo de la Enseñanza Secundaria Obligatoria (14-16* *años), aunque ésta aparezca como una obra prealgebraica en la organización matemática escolar?*

El intento de integrar en la ESO, de manera aislada, el proceso de estudio de una praxeología matemática plenamente algebrizada como, por ejemplo, las que pueden construirse en torno a la *divisibilidad*, la *proporcionalidad de magnitudes* o el *cálculo aritmético*, chocará con *restricciones ecológicas* de origen matemático-didáctico. Dado que el contrato didáctico institucional se fundamenta en la organización matemática global de la Enseñanza Secundaria y ésta mantiene un carácter fuertemente *prealgebraico*, es fácil prever que las modificaciones encaminadas a hacer vivir localmente una praxeología matemática algebrizada serán muy *inestables* y *desaparecerán a corto plazo* (Cap. V).

TAD8. *¿Qué características específicas, en términos de los momentos del estudio y de los dispositivos didácticos, debería tener el proceso de estudio en el caso en que la organización matemática a estudiar estuviese plenamente algebrizada? ¿Cuáles son las restricciones que dificultan la existencia de este tipo de procesos de estudio en la Enseñanza Secundaria?*

Hemos mostrado que un tal proceso de estudio requeriría, entre otras, las siguientes condiciones: posibilidad de llevar a cabo un *cuestionamiento tecnológico*; potenciación del carácter manipulativo (escrito) del *momento exploratorio*; creación de un dispositivo didáctico nuevo en el que pudiese vivir el *momento del trabajo de la técnica*; e *integración de los diferentes momentos* del proceso de estudio, para permitir plantear objetivos a largo plazo (Cap. VI). Todas estas condiciones se contradicen frontalmente con las cláusulas del *contrato didáctico institucional* vigente actualmente en la ESO y, por tanto, cualquier intento de integrar en la ESO un proceso de estudio algebrizado provocaría la aparición de restricciones ecológicas de origen matemático-didáctico, además de las restricciones de origen cultural provenientes de la *peyoración cultural del álgebra*.

TAD9. *Cómo podemos describir y analizar la actividad didáctica escolar del profesor como director del proceso de estudio del álgebra escolar? ¿Cuál es la* "tecnología didáctica" *dominante en la Enseñanza Secundaria respecto del álgebra escolar? ¿Cómo afecta dicha tecnología –esto es, el discurso interpretativo y*

> *justificativo de las técnicas didácticas que se utilizan en la enseñanza del álgebra- sobre el proceso de estudio?*

Hemos mostrado que existe un modelo epistemológico dominante en la institución escolar que identifica el "álgebra escolar" con una prolongación y generalización unilateral de la "aritmética escolar" que hemos denominado "*aritmética generalizada*". Postulamos ahora que dicho modelo epistemológico constituye la base sobre la que descansa la *tecnología didáctica espontánea del profesor* respecto del álgebra escolar (Cap. IV).
Esto significa que cuando el profesor aborda los *problemas didácticos* ligados a la enseñanza del álgebra (cuando intenta, por ejemplo, iniciar a los alumnos en el estudio de las ecuaciones de primer grado entendidas como la puerta de entrada al álgebra escolar) y utiliza determinada *técnica didáctica* (como, por ejemplo, pasar de ciertos problemas simples conocidos por los alumnos sobre el cálculo de porcentajes e impuestos, a los correspondientes problemas inversos que surgen al permutar entre sí los datos y las incógnitas) se ve llevado a interpretar y justificar su manera de hacer –su técnica didáctica- en el precitado modelo dominante del álgebra escolar. Incluso la *elección de la situación para introducir las ecuaciones de primer grado* (proveniente siempre de una situación aritmética) y la propia *interpretación dominante de las ecuaciones de primer grado* (como igualdades numéricas en la que aparece algún término desconocido) que condicionan fuertemente el proceso de estudio del álgebra escolar, dependen de la interpretación del álgebra escolar como "*aritmética generalizada*" (Cap. IV y VI).

La solución de los nueve problemas enunciados anteriormente debería permitir explicar la génesis, las relaciones mutuas y las consecuencias de dos fenómenos, aparentemente contradictorios entre sí: el de la *progresiva aritmetización del álgebra escolar*, que alcanza, al menos, toda la Enseñanza Secundaria Obligatoria (12-16 años), y el de la *algebrización abrupta de las praxeologías matemáticas*, que puede observarse especialmente en el paso de la Enseñanza Secundaria a la Enseñanza Universitaria. Estos dos fenómenos ocupan actualmente una posición central en el análisis de la ecología institucional de las praxeologías matemático-didácticas en torno al *álgebra escolar*. Es importante subrayar que, aunque inicialmente estos dos fenómenos puedan describirse como *fenómenos matemáticos* (puesto que, en primera instancia, hacen referencia a cambios en la naturaleza y las relaciones entre los componentes de las *organizaciones matemáticas*), ambos modifican profundamente la naturaleza de los *procesos de estudio* posibles de determinadas organizaciones matemáticas en el seno de una institución. Por tanto, inciden sobre las *organizaciones didácticas* y deben ser considerados como verdaderos *fenómenos matemático-didácticos.*

Para concluir, queremos señalar que la principal aportación de este trabajo queda bastante bien plasmada en la formulación de los nueve problemas anteriores y en los resultados parciales que hemos obtenido a lo largo de su estudio. La mejor prueba de la fecundidad de estas cuestiones radica en el hecho de que con su estudio ha empezado a tomar cuerpo un nuevo campo de problemas de investigación en didáctica de las matemáticas. Algunos de los problemas que forman parte de este campo han evolucionado hacia cuestiones relativamente desligadas del problema inicial que hemos denominado el *problema didáctico del álgebra escolar*.

Describiremos brevemente, para terminar, algunas de las líneas de investigación que han emergido hasta el momento de dicho campo de problemas.

(1) *¿Qué cambios se producen en el contrato didáctico institucional en el paso de la Enseñanza Secundaria a la Enseñanza Universitaria de las matemáticas? ¿Cómo se reflejan estos cambios en las correspondientes praxeologías matemático-didácticas y, en particular, en los correspondientes procesos de algebrización?*

Al avanzar de la ESO al Bachillerato y, sobre todo, de Secundaria a la Universidad, el proceso de algebrización de las praxeologías matemáticas estudiadas avanza muy rápidamente, de tal manera que aunque *nunca se muestra la continuidad y el carácter progresivo de la algebrización*, el proceso continúa y a cierto nivel escolar (que suele coincidir con el inicio de la Enseñanza Universitaria) todas las organizaciones matemáticas que se estudian están completamente algebrizadas, se da por supuesta su algebrización y se ignoran absolutamente las praxeologías prealgebraicas anteriormente estudiadas. Llamaremos a este fenómeno matemático-didáctico, el *fenómeno de la algebrización abrupta de las organizaciones matemáticas*. Dicho fenómeno queda claramente reflejado, como no podía ser de otra manera, en los cambios bruscos de algunas de las cláusulas del contrato didáctico institucional al pasar de Secundaria a la Universidad. El estudio de los cambios que se producen en el contrato didáctico institucional –no únicamente los relativos al proceso de algebrización- en el paso de la Enseñanza Secundaria a la Enseñanza Universitaria de las matemáticas

constituye una nueva línea de investigación dentro de la cual se está llevando a cabo un trabajo de tesis doctoral (Fonseca y Gascón, 2000, 2003).
Este trabajo ha puesto en evidencia que muchas de las dificultades que se detectan en la enseñanza y aprendizaje de las matemáticas en secundaria pueden explicarse a partir de la constatación de que las organizaciones matemáticas que se enseñan en secundaria tienen un marcado carácter puntual. Dicho en otras palabras, la enseñanza de las matemáticas en secundaria tiende a presentar las nociones matemáticas de manera aislada, con sus propios tipos de problemas y estrategias de resolución, pero sin relacionarlo con los conceptos, los tipos de problemas y las estrategias de los demás temas del currículum. Hablaremos al respecto de la dificultad escolar para construir *organizaciones matemáticas regionales*, que engloban, articulándolas entre sí, distintas organizaciones matemáticas *locales* y *puntuales*.

(2) *¿Existe alguna relación entre la ausencia de organizaciones matemáticas regionales (e incluso locales) en secundaria y las dificultades de los alumnos en la resolución de problemas? ¿Qué tipos de relaciones?¿Podría la construcción de OM regionales en la enseñanza secundaria promover en los alumnos la activación de las denominadas "estrategias metacognitivas"? ¿En qué ámbitos matemáticos es posible dicha construcción?*

El estudio de esta amplia cuestión, que se encuentra actualmente en un estadio exploratorio muy inicial, debería permitir avanzar en el trabajo de "didactificación" de fenómenos que han sido abordados hasta hoy día desde un enfoque principalmente cognitivo. Intuimos que esta línea de investigación deberá considerar, como un elemento explicativo fundamental, la función integradora (o "unificadora") del proceso de algebrización, es decir la potencia del instrumento algebraico para describir y articular entre sí organizaciones matemáticas puntuales inicialmente desconectadas entre sí.

(3) *En todo proceso de estudio se construyen organizaciones matemáticas a partir del desarrollo y la articulación de organizaciones matemáticas previamente construidas. Por lo tanto, toda descripción de una organización didáctica debe contemplar la dinámica de las organizaciones matemáticas que la componen. ¿Cómo interviene la descripción de las organizaciones matemáticas en la caracterización de una organización didáctica? ¿Qué funciones didácticas asumen o pueden asumir las organizaciones matemáticas a* *lo largo del proceso de estudio? ¿Cómo intervienen en los distintos momentos?¿Cómo condicionan y restringen las posibles técnicas didácticas de gestión de los momentos?*

La caracterización del álgebra como proceso de modelización de organizaciones matemáticas previamente construidas (Cap. V) ha puesto de manifiesto las funciones didácticas del proceso de algebrizacion, lo que corrobora el vínculo inseparable entre organizaciones matemáticas y organizaciones didácticas que está en la base del programa epistemológico.

El problema de la función didáctica de las organizaciones matemáticas está empezando a ser abordado a partir de algunos estudios de casos centrados en organizaciones matemáticas locales como, por ejemplo, la medida de magnitudes continuas en la Enseñanza Primaria (Bolea *et al.*, 2000) y los sistemas de numeración en la formación de maestros de primaria (Gascón y Sierra, 2002_a y 2002_b).

(4) *Dado que la transposición didáctica opera sobre organizaciones matemáticas en proceso de algebrización o, más en general, de matematización e integración creciente, produce que determinadas organizaciones matemáticas regionales aparezcan en la escuela de manera fragmentada, e incluso que pervivan en el sistema de enseñanza organizaciones locales cuyos componentes pertenecen a diferentes "estratos históricos" o distintos niveles de matematización de una misma organización regional.*

El caso de la proporcionalidad estudiado en el Capítulo V es, para nosotros, un ejemplo paradigmático de este fenómeno, que ya había sido puesto en evidencia en el caso de la raíz cuadrada por Teresa Assude (1992) designado como un fenómeno de "parada" de la transposición didáctica. Del estudio de este fenómeno surge una nueva línea de investigación cuyo objetivo es analizar las condiciones de posibilidad del estudio escolar de organizaciones matemáticas regionales, como por ejemplo la organización matemática en torno a la modelización funcional en Secundaria (García y Ruiz, 2002).

Al acabar este trabajo nos encontramos con nuevas líneas de investigación en el horizonte y con más problemas abiertos que respuestas aportadas. Ésta es sin duda la mejor prueba de la fecundidad que, hoy por hoy, posee el Programa Epistemológico en didáctica de las matemáticas.

MONOGRAFÍAS DEL SEMINARIO MATEMÁTICO "GARCÍA DE GALDEANO"

Desde 2001, el Seminario ha retomado la publicación de la serie *Monografías* en un formato nuevo y con un espíritu más ambicioso. El propósito es que en ella se publiquen tesis doctorales dirigidas o elaboradas por miembros del Seminario, actas de Congresos en cuya organización participe o colabore el Seminario y monografías en general. En todos los casos, se someten al sistema habitual de arbitraje anónimo.

Los manuscritos o propuestas de publicaciones en esta serie deben remitirse a alguno de los miembros del Comité editorial. Los trabajos pueden estar redactados en español, francés o inglés.

Las monografías son recensionadas en *Mathematical Reviews* y en *Zentralblatt MATH*.

Últimos volúmenes de la serie:

21. A. Elipe y L. Floría (eds.): *III Jornadas de Mecánica Celeste*, 2001, ii + 202 pp., ISBN: 84-95480-21-2.

22. S. Serrano Pastor: *Modelos analíticos para órbitas de satélites artificiales de tipo quasi-spot*, 2001, vi + 76 pp., ISBN: 84-95480-35-2.

23. M. V. Sebastián Guerrero: *Dinámica no lineal de registros electrofisiológicos*, 2001, viii + 251 pp., ISBN: 84-95480-43-3.

24. Pedro J. Miana: *Cálculo funcional fraccionario asociado al problema de Cauchy*, 2002, 171 pp., ISBN: 84-95480-57-3.

25. Miguel Romance del Río: *Problemas sobre Análisis Geométrico Convexo*, 2002, xvii + 214 pp., ISBN: 84-95480-76-X.

26. Renato Álvarez – Nodarse: *Polinomios hipergeométricos y q–polinomios*, 2003, vi +341 pp., ISBN: 84-7733-637-7.

27. M. Madaune – Tort, D. Trujillo, M. C. López de Silanes, M. Palacios, G. Sanz (eds.): *VII Jornadas Zaragoza – Pau de Matemática Aplicada y Estadística*, 2003, xxvi +523 pp., ISBN: 84-96214-04-4.

28. Sergio Serrano Pastor: *Teorías analíticas del movimiento de un satélite artificial alrededor de un planeta. Ordenación asintótica del potencial en el espacio fásico*, 2003, 164 pp., ISBN: 84-7733-667-9.

REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

ALONSO, C.; CID, E.; GARCÍA, P.; USÓN, C. (1986): Materiales sin pizarra (Materiales para un método activo en 1º de BUP). ICE de la Universidad de Zaragoza. Zaragoza

AMIGO, C. et al. (1994): Matemáticas 3, Mc Graw-Hill, Madrid.

AMIGO, C. et al. (1995): Matemáticas 4, Mc Graw-Hill, Madrid.

ANTIBI, A. y BROUSSEAU, G. (2000): La de-transposition didactique des connaisances scolaires, *Recherches en Didactique des Mathématiques*, 20/1, pp. 7-40.

ARSAC, G. (1988): Les recherches actuelles sur l'apprentissage de la démonstration et les phénomènes de validation en France, *Recherches en Didactique des Mathématiques*, 9/3, pp. 247-280.

ARTIGUE, M. (1990): Épistémologie et didactique, *Recherches en didactique des mathématiques*, 10,/2.3, pp. 241-286.

ARZARELO, F. BAZZINI, L. y CHIAPPINI, G. (1993): Cognitive processes in algebraic thinking: towards a theoretical framework, Proc. PME XVII, Tsukba, Japan, I, pp. 138-145

ARZARELO, F. BAZZINI, L. y CHIAPPINI, G. (1994): The process of naming in algebraic problem solving, Proc. *PME XVIII*, Lisbon, II, pp. 40-47.

ARZARELO, F. BAZZINI, L. y CHIAPPINI, G. (1994): L'algebra come strumento de pensiero. Analisi teorica e consideración didattiche. Universtà di Pavia, Pavia.

ASSUDE, T. (1992): Un phénomène d'arrêt de la transposition didactique. Ecologie de l'objet «racine carrée» et analyse du currículo. Tesis Doctoral, Université Joseph Fourier, Grenoble

AUSUBEL, D.P.(1968): Educational Psycology: A Cognitive View, Holt, Rinehart and Winston: New York

BACHELARD, G. (1938): La formation de l'esprit scientifique, Vrin, París. Edición 1975.

BAILO, C. et al. (1996a): Matemáticas 1 (Primer ciclo), Teide, Barcelona

BAILO, C. et al. (1996b): Matemáticas 3 (Segundo ciclo), Teide, Barcelona

BAILO, C. et al. (1997): Matemáticas 2 (Primer ciclo), Teide, Barcelona

BAUERSFELD, H. y SKOWRONEK, H. (1976): Research Related to the Mathematical Learning Process, en Athen y Kunle, (Eds.), pp. 231-245

BELL (1981) Diagnostic Teaching. Tiching For Term Learning. Shell Center for Mathematical Education University of Nottinghan.

BISHOP, A. (1998): Equilibrando las necesidades matemáticas de la educación general con las de la instrucción matemática de los especialistas. *Suma* 27, pp. 25-37.

BOERO, P. (1996): Transformation and anticipation as key processes in algebraic problem solving, in Sutherland R (ed.): *Algebraic Processes and Structures*, Kluwer.

BOERO, P. (1998): Inequations: pour une recherche pluridisciplinaire, *SFIDA-XI*, Nice.

BOLEA, P., BOSCH, M. y GASCÓN, J. (1998a): Le caractère problématique du processus d'algébrisation. Proporcionnalité et grandeurs dans l'enseignement obligatoire, *Actes de la IXème école d'été de didactique des mathématiques*, ARDM, pp. 153-159.

BOLEA, P., BOSCH, M. y GASCÓN, J. (1998b): The role of algebraization in the study of a mathematical organization, CERME-1, Osnabrueck, Germany.

BOLEA, P., BOSCH, M. y GASCÓN, J. (2001): ¿Cómo se construyen los problemas en didáctica de las matemáticas? *Educación Matemática*, 13/3, pp.22-63.

BOLEA, P., BOSCH, M. y GASCÓN, J. (2002): La transposición didáctica de organizaciones matemáticas en proceso de algebrización. El caso de la proporcionalidad, *Recherches en Didactique des Mathématiques*,. 21/3, pp. 247-304.

BOLEA, P., BOSCH, M., GARCÍA, J., GASCÓN, J., RUIZ, L. y SIERRA, T. (2000): Análisis didáctico del artículo "*El peso de un recipiente. Estudio de los problemas de la medición en CM*" en el marco de la teoría antropológica.
Recuperable en http://www.ugr.es/local/jgodino/siidm.htm

BOOTH, L. (1984): Algebra: Children's Strategies and Errors, NFER-Nelson.

BOSCH, M. (1994): *La dimensión ostensiva en la actividad matemática. El caso de la proporcionalidad*, Tesis doctoral, UAB, Barcelona.

BOSCH, M. (1996): La dimension ostensive dans l'activité algébrique. SFIDA (Torino).

BOSCH, M (1997): Modélisations mathématiques en didactique: La modélisation anthropologique de l'activité mathématique. *Actas de la IXème école d'été de didactique des mathématiques* pp. 351-356.

BOSCH, M. y CHEVALLARD, Y. (1999): La sensibilité de l'activité mathématique aux ostensifs. Objet d'étude et problématique, *Recherches en didactique des mathematiques*, 19/1, pp. 77-124.

BOSCH, M. y GASCÓN, J.(1994): La integración del momento de la técnica en el proceso de estudio de campos de problemas de matemáticas, *Enseñanza de las Ciencias* 12/3, pp. 314-332.

BOSCH, M y ESPINOZA, L. (1997): La algebrización de la noción de límite en la historia. Seminario de Didáctica de las matemáticas.

BOURDIEU, P. (1980): Le sens pratique, Editions de Minuit, París.

BOYER, C. (1987): Historia de la matemática. Alianza Universidad, Madrid.

BROIN, D. (2002): Atrthmétique et algèbre élémentaires scolaires. Tesis doctoral, Université de Bordeaux I (no publicado).

BROUSSEAU, G.

1979 Etude de situations, (Théorie des situations didactique). IREM de Bordeaux

1986 Fondements et méthodes de la didactique des mathématiques. *Recherches en didactique des mathematiques*, 7/2, pp. 33-115.

1994 Problèmes et résultats de Didactique des Mathématiques, ICMI Study 94, Washington

1995 L’enseignant dans la théorie des situations didactiques. En Norfelise, R. Et Perrin-Glorian, M.J., Actes de la VIIIe Ecole d’été de didactique des mathématiques pp. 3-46, IREM de Clertmont-Ferrand.

1998 Théorie des situations didactiques. Textes rassemblés et prepares par N. Balacheff, M. Cooper, R.Sutherland et V. Warfield. La Pensée Sauvage, éditions. Grenoble.

BROUSSEAU, G y CENTENO, J. (1991): Rôle de la mémoire didactique de l’enseignant. *Recherches en didactique des mathematiques*, 11/2, pp. 167-210.

CAVEING, M. y VITRAC, B. (1990): Euclides d’Alexandria. Les eléments. Livres I-IV. vol.1, P.U.F., París

CEDILLO, T. (1999): Desarrollo de habilidades algebraicas. Grupo Editorial Iberoamericano, México D.F.

CEDILLO, T (1999): Nubes de puntos y modelación algebraica. Grupo Editorial Iberoamericano, México D.F.

CHALMERS, A. (1986): ¿Qué es esa cosa llamada ciencia?, Siglo XXI, Madrid.

CHEVALLARD, Y.:

1985a La transposición didáctica. Del saber sabio al saber enseñado. Buenos Aires: Aique. (La traducción que se cita es de 1997).

1985b Le passage de l'arithmétique a l'algebrique dans l'enseignement des mathematiques au collège-Première partie: L'évolution de la transposition didactique,*Petit x*, 5, pp. 51-94.

1986a Esquisse d'une théorie formelle du didactique. En C. Laborde (éd), Actes du Première colloque franco-allemand de didactique des mathématiques et de l'informatique (CIRM, Marseille, 16-21 novembre 1986). La Pensée sauvage, Grenoble.

1986b Enseignement de l’algèbre et transposición didáctica, Intervention aux Seminari e conferenze di scienze matematiche (IRRSAE Piemonte, Turín 25-26 novenbre 1986)

1988 Médiations et individuation didactiques, *Interactions didactiques*, 8 *(Le contrat didactique: differentes approches),* Universités de Genève et de Neuchâtel, pp.23-34.

1989a Arithmétique, algèbre, modélisation. Etapes d’une recherche, Publications nº 16 de l’IREM d’Aix-Marseille, 8, Marseille.

1989 b *Aspects d'un travail de théorisation de la didactique des mathématiques. Etude du cas de l'algèbre élémentaire. Note de synthèse pour l'habilitation à diriger des recherches.* disponible en el IREM d'Aix-Marseille.

1989 c Le concept de rapport au savoir. Rapport personnel, rapport institutionnel, rapport officiel, *Séminaire de Didactique des Mathématiques et de l'Informatique de Grenoble*, Université Joseph Fourier.

1989 d Le passage de l'arithmétique a l'algebrique dans l'enseignement des mathematiques au collège (deuxième partie). Perspectives curriculaires: la notion de modelisation, *Petit x*, 19, pp. 43-72.

1989 e Le passage de l'arithmétique a l'algebrique dans l'enseignement des mathematiques au collège (Troisième partie). Perspectives curriculaires: voies d'attaque et problèmes didactiques

1991 *Didactique, anthropologie, mathématiques,* Postfacio a la 2ª edición de *La transposition didactique. Du savoir savant au savoir enseigné*, La pensée Sauvage: Grenoble.

1992 Concepts fondamentaux de la didactique: Perspectives apportées par une approche anthropologique, *Recherches en didactique des mathematiques*, 12/1, pp. 73-112.

1996 La fonction professorale: esquisse d'un modèle didactique, en R. Noirfalise et M-J. Perrin-Glorian (coord.), *Actes de l'École d'Été de Didactique des Mathématiques* (Saint-Sauves d'Auvergne, 1995), pp. 83-122.

1997 Familière, problématique: la figure du professeur, *Recherches en Didactique des Mathématiques*, 17/3. pp. 17-54

1998 Organisations mathématiques: 4. Algèbre et algébrisation.
Dicctionnaire de didactique des mathématiques. IUFM, Aix-Marseille.

1999 L'analyse des pratiques enseignantes en théorie anthropologique du didactique, *Recherches en Didactique des Mathématiques,* 19/2, pp. 221-266.

2001 Aspectos problemáticos de la formación docente. XVI Jornada SIIDM celebrado en Huesca
Recuperable en http://www.ugr.es/local/jgodino/siidm.htm

CHEVALLARD, Y; BOSCH, M. y, GASCÓN, J. (1997): Estudiar Matemáticas. El eslabón perdido entre enseñanza y aprendizaje. Horsori, Barcelona.

COMIN, E. (2000): Proporcionalité et fonction linéaire. Caracteres, causes et effet didactiques des évolutions et des reformes dans la scolarité obligatoire. Tesis doctoral, Univessité de Bordeaux I.

CORRALES, C. (2000): El teorema de Fermat, en Martinón, A. (ed.) *Las matemáticas del siglo XX*, Nivola, Madrid

CRISTINA, C. y PÉREZ, E. (1996$_a$): Matemáticas ESO 1er Ciclo (curso 1º), Editex, Madrid.

CRISTINA, C. y PÉREZ, E. (1996$_b$): Matemáticas 2º curso ESO, Editex, Madrid..

DERRIDA, J. (1967): *De la grammatologie*, Les Editions de Minuit, París.

DESCARTES, R. (1996): Reglas para la dirección del espíritu. Alianza Editorial, Madrid.

DÍEZ M. (1995): Sobre la simbolización en el álgebra. Aplicación al proceso de aprendizaje de las desigualdades en Educación Secundaria. Tesis Doctoral, Universidad Complutense de Madrid.

DROUHARD, J. P. (1992): *Les Écritures Symboliques de l'Algèbre Elémentaire*, Tesis Doctoral, Université Denis Diderot, París 7.

DROUHARD, J.P. (1996): Algèbre, calcul symbolique et didactique. *Actas de la VIIIème école d'été de didactique des mathématiques (1995)* pp. .325-344.

DUBINSKY, E. (1991): Reflective Abstraction in Advanced Mathematical Thinking, en David Tall (ed.), *Advanced Mathematical Thinking*, Kluwer Academic Publishers: Dordrecht, pp. 95-126.

ECHEVERRÍA, J. (1998): Filosofía de la Ciencia. Akal, Madrid.

EDELVIVES (1970): Matemáticas 4. Bachillerato elemental, Luis Vives, Zaragoza.

ENFEDAQUE, J. (1990): De los números a las letras, *Suma*, 5, pp. 23-34.

ESPINOZA, L. (1998): Organizaciones Matemáticas y Didácticas en torno al objeto “límite de función”. Del “pensamiento del profesor” a la gestión de los momentos del estudio, Tesis Doctoral, Universidad Autónoma de Barcelona. (no publicado).

EUCLIDES (1991): Elementos, libros I-IV, Gredos, Madrid.

FILLOY, E. (1999): Aspectos teóricos del álgebra educativa. Grupo Editorial Iberoamericano, México D.F.

FILLOY, E. y ROJANO, T. (1984): From an arithmetical to an algebraic thought (A clinical study with 12-13 years old), *Proceedings of the Sixth Annual Conference for the PME*, *North American Chapter* (pp. 51-56), Madison, WI: University of Madison.

FILLOY, E. y ROJANO, T. (1989): Solving Equations: The Transition from Arithmetic to Algebra, *For the Learning of Mathematics*, 9/2, pp. 19-25.

FONSECA, C. y GASCÓN, J. (2003): Reconstrucción de las organizaciones matemáticas en las instituciones didácticas. XIV Jornada SIIDM celebrada en Cangas do Morrazo.
Recuperable en http://www.ugr.es/local/jgodino/siidm.htm

FONSECA, C. y GASCÓN, J. (2002): Ausencia de Organizaciones Matemáticas Locales en las instituciones escolares, *Recherches en Didactique des Mathématiques,* (en prensa*).*

FREGE G. (1892): Uber Sinn und Bedeutung, *Zeitschrift für Philosophie und philosophische Kritik*, Nueva Serie, 100, 25-50. [Traducción castellana de Ulises Moulines, Sobre sentido y referencia, en *Estudios sobre semántica*, pp. 51-86, Ediciones Orbis: Barcelona, 1984].

FREUDENTHAL, H. (1973): *Mathematics as an Educational Task*, Dordrecht: Reidel Publishing Company.

GARCÍA, F. J. y RUIZ, L (2002): Organizaciones matemáticas de referencia en torno a la proporcionalidad de magnitudes. XVIII Jornada SIIDM celebrado en Castellón.
Recuperable en http://www.ugr.es/local/jgodino/siidm.htm

GASCÓN, J.:

1993 Desarrollo del conocimiento matemático y análisis didáctico: Del patrón análisis-síntesis a la génesis del lenguaje algebraico, *Recherches en didactique des mathematiques*, 13/3, pp. 295-332.

1994 a El papel de la resolución de problemas en la enseñanza de las matemáticas, *Educación Matemática*, 6/3, pp. 37-51.

1994 b Un nouveau modèle de l'algèbre élémentaire comme alternative à l'"arithmétique généralisée", *Petit x*, 37, pp. 43-63.

1996 La modélisation mathématique et l'étude des champs de problèmes. *Actas de la VIIIème école d'été de didactique des mathématiques*, pp. 303-307.

1997 $_a$ Cambios en el contrato didáctico: el paso de estudiar matemáticas en secundaria a estudiar matemáticas en la universidad. *Suma,* 26, pp. 11-21

1997 $_b$ L'algebrizació de l'activitat matemàtica a la ESO, Curso de doctorado impartido en el Dep. de Matemàtiques de la UAB (no publicado).

1998 Evolución de la didáctica de las matemáticas como disciplina científica, *Recherches en Didactique des Mathématiques,* 18/1, pp. 7-34

1999 $_a$ La naturaleza prealgebraica de la matemática escolar, *Educación matemática*, 11/1, pp. 77 - 88.

1999 $_b$ Fenómenos y problemas en didáctica de la matemática, *Actas del III SEIEM,* pp. 129-150.

2001 Incidencia del modelo epistemológico de las matemáticas sobre las prácticas docentes, *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa RELIME,* 4/2, pp. 129-159.

2002 $_a$ Geometría sintética en la ESO y analítica en el Bachillerato. ¿Dos mundos completamente separados. Suma, 39, pp. 13-25.

2002 $_b$ Reconstrucción de la divisibilidad en la Enseñanza Secundaria, *Quadrante,* 10/2, pp. 33-66.

GASCÓN, J. y SIERRA, T. (2002 $_a$): Reconstrucción escolar de la numeración para la formación de maestros. I: La representación simbólica de los números. *Actas: Aportaciones de la didáctica de las matemáticas a diferentes perfiles profesionales,* pp. 213-228. Universidad de Alicante.

GASCÓN, J. y SIERRA, T. (2002 $_b$): Reconstrucción escolar de la numeración para la formación de maestros. II: Hacia la simplificación de los algoritmos de cálculo. *Actas: Aportaciones de la didáctica de las matemáticas a diferentes perfiles profesionales,* pp. 229-244. Universidad de Alicante.

GENERALITAT DE CATALUNYA (1993): *Currículum. Educació Secundària Obligatòria. Àrea de Matemàtiques,* Servei de Difusió i Publicacions de la Generalitat de Catalunya, Barcelona.

GIROD, F. (sd): Traité élémentaire d'Algèbre théorique et practique. Premier cycle, André fils, París.

GODINO, J. y BATANERO, C. (1994): Significado institucional y personal de los objetos matemáticos, *Recherches en Didactique des Mathématiques,* 14/3, pp. 325-355.

GODINO, J. Y BATANERO, C. (1998): Funciones semióticas en la enseñanza y aprendizaje de las matemáticas, *Seminario Interuniversitario de Investigación en Didáctica de las Matemáticas (SIIDM)*, Jornadas de Baeza.

GONZALEZ, C. et al (1994): ESO 2º Ciclo Matemáticas, Editex, Madrid.

GRAS, R. (1996): L'implication statistique, nouvelle méthode exploratoirede dones, La Pensée sauvage, Grenoble.

GRUGEON, B. (1995): Etude des rapports institutionneles et des rapports personnels des eleves à l'algèbre élémentaire dans la transition entre deux cycles d'enseignement: BEP et Première G. Tesis Doctoral

GRUPO AZARQUIEL (1991): Ideas y actividades para enseñar álgebra, Síntesis, Madrid

GRUPO AZARQUIEL (1994): Estrategias utilizadas en la traducción del lenguaje natural al lenguaje algebraico, *Suma* 16, pp. 48-53

HAREL, G. v KAPUT, J.(1991): The role of conceptual enttities and their symbols in building adavanced mathematical concepts, Tall, D. (ed.), *Avanced Mathematical Dhinking*, Dordrecht: Kluwer, pp. 82-94.

KAPUT, J. (1987): Algebra papers: A representational framework, en N. Bergeron, N. Herscovics y C. Kieran (eds.), *Proceedings of the eleventh International Conference for the Psychology of Mathematics Education*, pp. 345-354.

KAPUT, J. (1996): ¿Una línea de investigación que sustente la reforma del álgebra? I y II, *UNO. Revista de Didáctica de las Matemáticas*, 9, pp. 85-97 y 10, pp. 89-103.

KIERAN, C. y FILLOY, E. (1989): El aprendizaje del álgebra escolar desde una perspectiva psicológica, *Enseñanza de las Ciencias*, 7/3, pp. 229-240.

KILPATRICK, J. (1992): A history of research in Mathematics Education, en Douglas A. Grouws (Ed.), *Handbook of research on mathematics teaching and learning*, Macmillan Publishing C.: New York. Pp.3-38.

KLEIN, J. (1934): Greek Mathematical Thonght and theoring of Algebra, M.I.T. Press, 1968.

KÜCHEMANN, D. (1981): Algebra, en Hart, K. (Ed.), *Children's Understanding of Mathematics*, Murray: London, pp.11-16.

KUHN, T.S. (1975): La estructura de las revoluciones científicas. Fondo de Cultura Económica, México.

LAKATOS, Y. (1971): Historia de la ciencia y sus reconstrucciones racionales, Tecnos, Madrid.

LEBESGUE, H. (1995): La medida de las magnitudes, Limusa, México.

MARCOS, C. y MARTÍNEZ, J. (1964): Matemáticas. Reválida Elemental, S. M. Madrid.

MEC, (1970): Educación General Básica. Nuevas Orientaciones, Magisterio Español, Madrid

MEC, (1987): Programas renovados de la Educación General Básica. Ciclo Superior, Escuela Española, Madrid

MEC, (1989): Diseño Curricular Base. Educación Secundaria Obligatoria 12-16, Madrid

MERCIER, A. (1996): L'algebrique, une dimension fondatrice des practiques mathematiques scolaires. *Actas de la VIIIème école d'été de didactique des mathématiques*, pp, 351-356.

PANCOBRO, L. et al. (1996[a]): Matemáticas 1, Mc Graw-Hill, Madrid.

PANCOBRO, L. et al. (1996[b]): Matemáticas 2, Mc Graw-Hill, Madrid.

PUIG ADAM, P (1956): Tendencias actuales en la enseñanza de la matemática. Revista de Educación, Madrid.

PUIG ADAM, P (1960): La matemática y su enseñanza actual. Publicaciones de la revista "Enseñanza Media", Madrid.

RADFORD, L. y GRENIER, M. (1996): Entre les choses, les symboles et les idées. une séquence d'enseignement d'introduction à l'algèbre, *Revue des sciences de l'education*, XXII/2, pp. 253-276.

RADFORD, L (1977): Una incursión por la cara oculta del desarrollo primitivo de las ecuaciones, *UNO. Revista de Didáctica de las Matemáticas*, 14, pp. 61-73.

RAMONET, I., 1996. Pensamiento único y nuevos amos del mundo. En Chomsky, N. y Ramonet, I., *Cómo nos venden la moto*, Icaria: Barcelona.

RECIO, T. (1993): El cálculo simbólico automático y la enseñanza del álgebra en el diseño curricular base, *Suma*, 13, pp. 13-26.

REVUZ, A. y otros (1983): El lugar de la geometría en la educación matemática. En Piaget y otros *La enseñanza de las matemáticas modernas*. Alianza Universidad, Madrid.

RIO del, SANCHEZ, J. (1993): ¿Cómo cambiar las concepciones erróneas de los estudiantes? Una experiencia en matemáticas. *Suma*, 11 y 12, pp. 9-24.

ROJANO, T. (1994): La matemática escolar como lenguaje. Nuevas perspectivas de investigación y enseñanza, *Enseñanza de las Ciencias*, 12/1, pp. 45-56.

SCHOENFELD, A.H. (1985): Mathematical Problem Solving, Academic Press: Orlando, FL.

SFARD, A. y LINCHEVSKI, L. (1991): Rules without reasons as processes without objects. The case of equations and inequalities, Proc. *PME XV*, Assisi, II, pp. 1-36.

SFARD, A. y LINCHEVSKI, L. (1994): The gains and the pitfalls of reification. The case of algebra, *Educational Studies in Mathematics*, 26, pp. 191-228.

SIERPINSKA, A. (1994): *Understanding in mathematics*, The Falmer Press: London.

SOCAS, M.; CAMACHO, M.; PALAREA, M. Y HERNÁNDEZ, J. (1989): Iniciación al álgebra. Síntesis, Madrid. SOCAS, M. y PALAREA, M. (1994): Algunos obstáculos cognitivos en el aprendizaje del lenguaje algebraico, *Suma*, 16, pp. 91-98.

SOCAS, M. y PALAREA, M. (1997): Las fuentes de significado, los sistemas de representación y errores en álgebra escolar. , *UNO. Revista de Didáctica de las Matemáticas*, 14, pp. 7-24.

SOCIEDAD MADRILEÑA DE PROFESORES DE MATEMÁTICAS «EMMA CASTELNUOVO» (1998): Implantación de las Matemáticas en la Educación Secundaria Obligatoria: Un análisis en el contexto internacional. *Suma*, 27, pp. 17-28.

TRIGUEROS, M. (1997): Le concept de variable est-il un objet mathematique pour les étudiants qui commencent l'université. Actas Escuela de verano 1997.

VELÁZQUEZ, F. (1991): ¿Desalgebrizar la Educación Básica?. Epsilón, 19, pp. 59-66.

VERGNAUD, G. (1990): La théorie des champs conceptuels. *Recherches en didactique des mathematiques*, 10, 2/3, pp. 133-170.

VITRAC, B. (1990): Traduction et commentaires aux Livres I-IV : *Géométrie Plane de "Les Éléments" d'Euclide d'Alexandrie*, París: Presses Universitaires de France.

VIZMANOS, J. (1997) : ¿Desaparecerá el álgebra elemental con la utilización de las nuevas calculadoras? *Suma*, 26, pp. 53-58.

WITHNEY, H. (1968): The mathematics of physical quantities. Part II: Quantity Structures and Dimensional Analysis, *American Mathematical Monthly*, 75, pp. 227-256.