Tres modalidades de diálogo entre APOS y TAD

María Trigueros
Dpto. Matemáticas, Inst. Tecnológico Autónomo de México, México

Marianna Bosch
IQS School of Management, Universitat Ramon Llull, España

Josep Gascón
Dept. Matemàtiques, Universitat Autònoma de Barcelona, España

Abstract. We present three dialogue modes among research theories or approaches in mathematics education, starting from a new conceptualization of scientific theories in terms of research praxeologies. Each dialogue mode is characterized by the praxeological elements that are taken as starting points: the kind of scientific problems dealt with; the theoretical component and the "methodological" component, which includes research techniques and technologies. The last two dialogue modes between APOS theory and ATD are illustrated, stressing those aspects of each theory that can be promoted and developed.

Résumé. Nous présentons trois modalités de dialogue entre théories ou approches de recherche en didactique des mathématiques à partir de la conceptualisation des théories scientifiques en termes de praxéologies de recherche. Chaque modalité de dialogue est caractérisée par l'ingrédient de praxéologie pris comme point de départ : les types de problèmes abordés ; le composant théorique ; la composante « méthodologique », qui inclut les techniques et technologies de recherche. Nous illustrons les deux dernières modalités en considérant le dialogue entre la théorie APOS et la TAD afin de mettre en évidence les aspects de chaque théorie que le dialogue permettrait de développer.

Resumen. Presentamos tres modalidades de diálogo entre teorías o enfoques de investigación en didáctica de las matemáticas a partir de la conceptualización de las teorías científicas en términos de praxeologías de investigación. Cada modalidad de diálogo se caracteriza por los elementos praxeológicos que se toman como punto de partida: los tipos de problemas que se abordan; el componente teórico; y el componente «metodológico» que incluye las técnicas y tecnologías de investigación. Se ilustran las dos últimas modalidades de diálogo entre la teoría APOS y la TAD poniendo el énfasis en los aspectos de cada teoría que el diálogo permitiría desarrollar.

Bosch, M., Gascón, J., Ruiz Olarría, A., Artaud, M., Bronner, A., Chevallard, Y., Cirade, G., Ladage, C. & Larguier, M. (Eds.), *Un panorama de la TAD* (pp. 77-116)

III Congreso Internacional sobre la TAD (Sant Hilari Sacalm, 25-29 enero 2010)

Conferencias

CRM Documents, vol. 10, Centre de Recerca Matemàtica, Bellaterra (Barcelona), 2011

La comunidad de investigadores en didáctica de las matemáticas ha desarrollado a lo largo de los años diversas teorías y modelos con el objetivo de comprender mejor los fenómenos relacionados con esta disciplina. Recientemente se ha iniciado un proceso de comparación de teorías y, en ocasiones, un intento de articulación de las mismas para crear un nuevo referente teórico que abarque los enfoques anteriores, como muestra, por ejemplo, el número especial de la revista *ZDM* dedicado a las *networking strategies* (Prediger, Arzarello, Bosch & Lenfant, 2008). Algunos de los trabajos desarrollados en este contexto se proponen contrastar dos teorías mediante el análisis de una misma experiencia didáctica; esto es, tomando datos empíricos (en general provenientes de una sala de clase) y proponiendo una interpretación desde el punto de vista de cada una de las teorías. Este tipo de comparación o contraste entre enfoques pone de manifiesto la necesidad de elaborar mecanismos de diálogo entre teorías que vaya más allá del vaivén entre los niveles empíricos y teóricos, para involucrar también otros componentes de la práctica investigadora.

En este artículo se pretende establecer un diálogo entre dos teorías de didáctica de las matemáticas que no son próximas entre sí, la teoría APOS (Acción, Proceso, Objeto, Esquema) y la teoría antropológica de lo didáctico (TAD). El propósito del estudio es doble: mostrar cómo puede llevarse a cabo esta comunicación considerando todos los componentes de ambas teorías; y localizar elementos de cada una de ellas que puedan extender el marco teórico de la otra sin violentar sus supuestos básicos. Como preámbulo al diálogo se presenta una breve discusión introductoria sobre la naturaleza de las teorías científicas y se proponen tres modalidades de diálogo. Además, y con el fin de conocer mejor las dos teorías en cuestión, esta discusión nos permitirá describir sus elementos básicos. Una vez presentados dichos elementos, se inicia propiamente el diálogo partiendo tanto del componente teórico como del componente técnico-práctico de cada enfoque. La tercera modalidad de diálogo se describe en términos generales, dejando su aplicación concreta al caso APOS-TAD abierta a futuras investigaciones.

1. Modalidades de diálogo entre teorías

El proceso histórico de diálogo o competición entre teorías científicas de un mismo ámbito empírico, esto es, entre teorías «rivales», constituye un aspecto esencial de la génesis y el desarrollo de estas. En consecuencia, para describir las modalidades de diálogo entre teorías, debemos utilizar necesariamente un modelo del desarrollo de la ciencia, es decir, un modelo epistemológico de la actividad de investigación.

En este trabajo partimos de un principio epistemológico básico relativo al desarrollo de las teorías científicas: postulamos que todo cambio de perspectiva teórica se manifiesta mediante la *evolución simultánea* de la *teoría* propiamente dicha y de los *problemas* que esta estudia. Más explícitamente, suponemos que las teorías son modelos que proporcionan los instrumentos para formular y abordar los problemas que surgen en el «mundo». En cierta medida son las propias teorías las que construyen los problemas que abordan. Y, recíprocamente, suponemos también que los problemas caracterizan las teorías en cada momento histórico (son su objeto de estudio) y la evolución de aquellos provoca nuevas necesidades teóricas y el desarrollo, a veces revolucionario, de las teorías.

En este punto es importante señalar que, junto a los ingredientes explícitos, las teorías tienen ingredientes implícitos que se van poniendo de manifiesto progresiva y lentamente a lo largo de su desarrollo. Según el epistemólogo Larry Laudan (1977), los ingredientes implícitos que comparten las teorías que forman parte de un mismo *programa de investigación* son dos:

- una serie de *compromisos ontológicos* acerca del tipo de entidades que se deben tomar en consideración y acerca de las relaciones básicas entre dichas entidades;
- una serie de *normas metodológicas* que hacen referencia a cómo llevar a cabo una investigación, al tipo y la extensión de los datos empíricos que deben considerarse, al tipo de respuestas admisibles y, en particular, a lo que se tomará como unidad de análisis de las teorías en cuestión.

La explicitación de la unidad de análisis de una teoría es muy importante porque pone de manifiesto una decisión metodológica que origina limitaciones voluntarias tanto del tipo de problemas que la teoría decide considerar como del tipo de respuestas que la misma considerará «admisibles». No se puede reprochar a una teoría que no explique algo que no se propone explicar, pero se le debe exigir que tome en consideración aquellas entidades que pueden afectar de forma substancial las respuestas que la propia teoría considera admisibles con respecto a los problemas que se plantea. En otras palabras, las teorías científicas deben respetar la coherencia entre sus compromisos ontológicos y sus normas metodológicas.

En principio, parece lógico suponer que el diálogo entre dos teorías será más fácil y más claro cuando se lleve a cabo partiendo de sus componentes explícitos pero, como veremos, cuando dos teorías no forman parte del mismo programa de investigación y, en consecuencia, no comparten los compromisos ontológicos ni las normas metodológicas, entonces puede ser necesario partir de ciertos ingredientes más o menos implícitos de las mismas para establecer el diálogo. En este caso, el propio diálogo puede obligar a explicitar algunos de dichos ingredientes y hasta provocar el desarrollo teórico o técnico de las teorías involucradas.

En lo que sigue, describiremos brevemente tres modalidades de diálogo entre teorías que, en principio, no tienen por qué formar parte del mismo programa de investigación. Exigiremos que dichas modalidades de diálogo sean compatibles con el principio epistemológico que hemos enunciado relativo al desarrollo de las teorías y que hace referencia a la evolución de estas como un todo.

La descripción de las diferentes modalidades de diálogo que proponemos a continuación requiere un cambio en la forma de conceptualizar las propias teorías científicas. Si se utiliza el lenguaje de la TAD, debería hablarse de «praxeología científica» o «praxeología de investigación» en lugar de «teoría científica», de la misma manera que debería hablarse de «praxeología matemática» en lugar de hablar simplemente de «teoría matemática». En adelante utilizaremos preferentemente la expresión «praxeología de investigación» (PI) en lugar de «teoría científica». Como toda praxeología, una praxeología de investigación consta de cuatro componentes básicos [T/τ/θ/Θ]. El bloque práctico [T/τ] constituye la «práctica de investigación» y está formado por el conjunto de *tipos de problemas* (*T*) que se consideran o se pueden formular, así como de las *técnicas de investigación* (τ) que se utilizan. El bloque teórico [θ/Θ] se compone de los distintos *discursos tecnológico-teóricos* que se utilizan para describir, justificar e interpretar la práctica de investigación.

Para ejemplificar estas nociones, aplicables a toda praxeología de investigación, podemos partir de un problema concreto de investigación didáctica π que podemos considerar un elemento de un tipo de problemas (o tareas) *T*. Tomaremos aquí un problema en cierta manera ajeno tanto a la TAD como a APOS y que puede formularse en el ámbito de la teoría de las situaciones didácticas (TSD) en los siguientes términos:

> π: ¿Cómo identificar un *obstáculo didáctico* en un problema de enseñanza de las matemáticas y cómo diseñar y gestionar una situación didáctica que permita a los alumnos superarlo? ¿Cómo hacerlo, en concreto, en el caso de la enseñanza de la noción de «ángulo» interpretado como un par de segmentos del mismo origen? (Berthelot & Salin, 1996).

La *tecnología* θ que permite justificar, interpretar y hasta generar una técnica de investigación útil para abordar este problema se deduce de uno de los primeros resultados obtenidos por la teoría de situaciones didácticas (TSD) y que fue formulado inicialmente como sigue (Brousseau, 1989): existen conocimientos que producen respuestas adaptadas en ciertos contextos habituales, pero que engendran respuestas falsas fuera de dichos contextos. Son los *obstáculos cognitivos* entre los que se pueden distinguir diferentes tipos en función de su origen. Si el conocimiento que hace obstáculo es un conocimiento «espontáneo» que aparece en el curso del desarrollo del niño, se habla de obstáculo *ontogenético*; si dicho conocimiento ha jugado un papel en el desarrollo histórico del concepto, se habla de obstáculo *epistemológico* y si ha sido introducido por el propio proceso de enseñanza se denomina obstáculo *didáctico*.

En este trabajo, la *técnica de investigación* τ que se utiliza como metodología de investigación es la metodología habitual de la TSD para identificar un obstáculo didáctico en un problema de enseñanza de las matemáticas. Consta de las siguientes etapas: la primera consiste en localizar en las respuestas de los alumnos en relación al concepto enseñado algún conocimiento potencialmente productor de sus errores; la segunda, en asegurarse que el obstáculo no es ni ontogenético ni epistemológico; la tercera, en poner en relación la enseñanza habitual en torno al concepto en cuestión y la emergencia del conocimiento inadaptado; la última etapa de esta metodología consiste en elaborar y experimentar un proceso de enseñanza alternativo (basado en otra forma de interpretar el concepto) que permita a los alumnos superar este obstáculo en situaciones adidácticas.

La teoría Θ estaría formada en este caso por las asunciones básicas explícitas e implícitas formuladas con los términos primitivos de la TSD. Se trata de asunciones no cuestionables (fuera de los periodos de crisis o revolución científica) por decisión metodológica y que han mostrado ampliamente su fecundidad como, por ejemplo, las relativas a las nociones de contrato didáctico, situación adidáctica, variables didácticas, etc.

Vemos pues que la expresión «teoría científica» es una metonimia, esto es, designa el todo, la praxeología de investigación, mediante una parte, la *teoría* Θ, que le sirve de «signo» o «estandarte». Y el principio epistemológico citado, que hace referencia a la evolución simultánea de la teoría Θ y los tipos de problemas T, se expresa en este lenguaje diciendo simplemente que la praxeología de investigación evoluciona como un todo. La evolución del bloque práctico-técnico $[T/\tau]$, provoca cambios en el bloque tecnológico-teórico $[\theta/\Theta]$ y, recíprocamente, el desarrollo de este permite construir nuevas *técnicas de investigación* τ y nuevos *tipos de problemas* T. Por esta razón, a partir de ahora nos referiremos a las teorías científicas como praxeologías de investigación.

1.1. Diálogo partiendo de los tipos de problemas

Podríamos intentar comparar dos praxeologías de investigación (en adelante, PI) a través de contrastar los resultados que se obtienen cuando ambas abordan un mismo problema. Pero esto no es posible porque, en coherencia con el principio epistemológico mencionado más arriba, y en contra de lo que postula el «empirismo ingenuo», los hechos empíricos no constituyen una base objetiva (e independiente de las PI) de donde surgirían los problemas. En la formulación de los problemas de investigación intervienen herramientas tecnológicas y teóricas de las PI en cuestión. En la medida que los problemas son «construidos» por las PI, no es posible abordar un mismo problema mediante dos PI diferentes. De todos modos, veremos que es posible establecer una modalidad de diálogo entre PI partiendo no directamente de los problemas, sino de ciertos ingredientes (relativamente) implícitos de una PI generalmente interpretados como la base empírica que sustenta los tipos de problemas considerados.

En efecto, dadas dos praxeologías de investigación didáctica, PI_1 y PI_2, supongamos que PI_1 plantea un tipo de problema π_1. Salvo en casos muy particulares no se podrá tomar π_1 como objeto de estudio de PI_2, pero sí se puede dar un «paso atrás» desde π_1 e intentar reinterpretar mediante las herramientas que proporciona PI_2 los hechos empíricos o las cuestiones problemáticas que están en el origen de π_1 (aunque en ocasiones la propia base empírica o la problemática original deberán ser ampliadas, recortadas o modificadas de alguna otra forma). Entonces es posible que PI_2 pueda construir nuevos tipos problemas π_2 abordables con sus propias herramientas y que mantendrán cierta relación originaria con π_1. Los dos tipos de problemas que resultan de esta modalidad de diálogo pueden ser más o menos próximos, dependiendo principalmente de las relaciones entre las PI consideradas. En cualquier caso, creemos que el diálogo será más fecundo si acaba involucrando todos los componentes de las dos PI.

En el trabajo de Esther Rodríguez, Marianna Bosch y Josep Gascón (2008) se ha iniciado esta modalidad de diálogo entre el enfoque de la metacognición del movimiento clásico del *Problem Solving*, que hace el papel de PI_1, y la TAD, que se toma como PI_2. Al reinterpretar con las herramientas de la TAD los hechos empíricos que están en la base de lo que se conoce como el «problema de Pólya» (que juega el papel de π_1 formulado por PI_1) se reformula el citado problema obteniendo un nuevo problema de investigación didáctica π_2 realmente «muy alejado» de π_1. En efecto, el problema de Pólya (π_1) puede enunciarse, en primera instancia, como sigue:

> π_1: Suponiendo que los estudiantes dominan las técnicas básicas o elementales y poseen los conocimientos matemáticos necesarios, ¿cómo

> conseguir que sean capaces de construir y utilizar adecuadamente estrategias complejas para resolver «verdaderos» problemas matemáticos o problemas «creativos»? (Ibíd. p. 288).

El movimiento del *Problem Solving*, iniciado por Pólya (1945) pretendió responder a este problema mediante la enseñanza de *reglas heurísticas* generales presuntamente útiles para cualquier tipo de problemas pero, como dice Brousseau (1997), esto no hizo más que desplazar el problema, puesto que una heurística no es más fácil de utilizar que un teorema y, de hecho, es aún más difícil de transformarla en una tarea.

Es en este punto en el que, a partir del trabajo de Schoenfeld (1985), la noción de «metacognición» entró con fuerza en el ámbito de la educación matemática y, más específicamente, en las investigaciones en torno al *Problem Solving*. Pero esta inclusión tampoco sirvió para resolver el problema π_1 de forma satisfactoria como pone de manifiesto el propio Schoenfeld (2007), reclamando la necesidad de ampliar drásticamente la base empírica, mediante la integración de la dimensión socio-cultural junto a lo cognitivo y tomando en consideración, además, las prácticas docentes del profesor de matemáticas.

La reformulación de π_1 desde la perspectiva de la TAD consiste, esencialmente, en introducir y dar prioridad a las dimensiones epistemológica e institucional del problema (Rodríguez et al., 2008, p. 290). Como consecuencia, la reformulación π_2 del problema de Pólya que se propone desde la TAD (PI_2), puede expresarse en los siguientes términos:

> π_2: En las instituciones de enseñanza actuales, ¿qué condiciones se requieren y qué restricciones limitan la realización de procesos didácticos que, partiendo de cuestiones problemáticas «vivas», permitan a los alumnos recorrer los distintos momentos didácticos y, por lo tanto, generar (construir o reconstruir) una secuencia de praxeologías matemáticas locales como respuesta a dichas cuestiones? Como consecuencia, y dada una institución de enseñanza concreta, ¿qué características de las praxeologías didácticas implementadas se requieren para llevar a cabo este tipo de procesos didácticos, creando así condiciones apropiadas para ello y evitando las restricciones presentes en la medida de lo posible? (Ibíd., p. 294).

Esta nueva formulación demanda una respuesta en términos de un tipo de organización didáctica capaz de implementar las condiciones que se requieren para llevar a cabo dicho tipo de actividad matemática. En la TAD, los recorridos de estudio e investigación (REI) constituyen el prototipo de organización didáctica funcional que satisface dichas condiciones y, consecuentemente, se plantea el problema *ecológico* relativo a las condiciones de viabilidad de los REI en las instituciones didácticas actuales.

El cambio más importante originado por la reformulación de π_1 en π_2 consiste en el paso de la perspectiva *individual* de π_1 a la perspectiva *institucional* y *ecológica* de π_2 en la que se subrayan las dimensiones epistemológica y didáctica del problema, por encima de la dimensión cognitiva. De hecho, las dificultades que en π_1 se relacionan con la ausencia o deficiencia de determinadas estrategias cognitivas o meta-cognitivas de los alumnos (elección y planificación de estrategias, control y regulación del desarrollo del proceso de resolución y revisión global del mismo), en π_2 se considera que pueden ser explicadas en términos de determinadas características de las praxeologías matemáticas escolares (singularmente del aislamiento y desarticulación de estas) así como de las características de las organizaciones didácticas asociadas.

Si bien en el ejemplo anterior los problemas π_1 y π_2 están muy alejados, en otros casos, cuando se utiliza esta modalidad de diálogo entre dos PI más cercanas, pueden obtenerse problemas relativamente próximos. Veamos un ejemplo. David Tall (2003) presenta una teoría cognitiva (PI_1), basada en la filosofía de Bruner, en la que se definen tres mundos de pensamiento: encarnado (*embodied*), proceptual y formal. Propone que los modos de representación en matemáticas se pueden categorizar en tres distintas maneras de operar: el mundo o modo encarnado, basado en las percepciones y acciones humanas en el contexto del mundo real; el mundo o modo simbólico-proceptual que combina el papel de los símbolos y el cálculo simbólico y que está basado en una teoría previa que él mismo propone (Tall, 2001), en la que se estipula que estos símbolos actúan de forma dual tanto en forma de procesos como en forma de conceptos (*proceptos*); finalmente el mundo o modo formal-axiomático que consiste en un acercamiento formal que se inicia con axiomas relacionados a partir de los cuales se hacen deducciones lógicas para demostrar teoremas.

En su estudio sobre el aprendizaje del cálculo diferencial, D. Tall considera que este se desarrolla básicamente en los dos primeros mundos de pensamiento. Para trabajar sobre el aprendizaje de un concepto específico plantea un tipo de problema que puede formularse como sigue:

> π_1: ¿Cuál es el desarrollo cognitivo necesario para la construcción de la noción de derivada en el cálculo?

Para dar respuesta a este problema Tall parte, en primer término, del conocimiento previo de los alumnos sobre el significado de que algo sea recto, a lo que denomina «raíz cognitiva», que pertenece al «mundo encarnado». A partir de las apreciaciones de los alumnos sobre la rectitud, que se llevan a cabo desde este «mundo», considera posteriormente lo que la «rectitud» implica cuando se analiza localmente el comportamiento de una curva. En este momento, la necesidad de explicar el comportamiento local de una curva provoca que el individuo se plantee el desarrollo de una herramienta matemática más sofisticada, la «linealidad local», que se puede relacionar estrechamente con la idea de rectitud local, pero que pertenece al mundo simbólico «proceptual». Esta herramienta consiste en la formulación matemática de la pendiente de la tangente a la curva como el límite de la pendiente de la recta secante que se extiende posteriormente a la noción de derivada como función.

Desde la teoría APOS (PI_2), este problema puede reformularse como el problema de la construcción del concepto de derivada en el cálculo. Aquí, el tipo de problemas que se formula es el siguiente:

> π_2: ¿Cuáles son las acciones, procesos, objetos, esquemas y las relaciones entre ellos que se requieren en la construcción de la noción de derivada?

A partir de esta pregunta, en la teoría APOS se diseña una descomposición genética que es la herramienta teórica que da cuenta de la forma en la que las posibles acciones, procesos, objetos y esquemas se articulan en la construcción de dicha noción (Asiala et al., 1997).

Así, la construcción de un concepto como el de derivada se inicia a partir de acciones específicamente diseñadas sobre objetos matemáticos conocidos, en este caso la función y la recta, para construir una primera aproximación lineal local de la función. Cuando el individuo reflexiona sobre estas acciones, puede generalizarlas, coordinarlas e interiorizarlas en un proceso, es decir, puede hacer cálculos simbólicos y mentales así como representaciones gráficas de la pendiente de la tangente a una función en un punto sin necesidad de seguir reglas memorizadas o algoritmos específicos. A través de actividades específicas se busca que el estudiante tenga la necesidad de considerar este proceso como una totalidad sobre la cual pueden hacerse nuevas acciones, además de analizar sus propiedades. Este proceso se puede encapsular en un objeto: la derivada en un punto. Este objeto se «desencapsula» en el proceso que le dio origen y se generaliza en un proceso que permite considerar la aproximación lineal en cada punto de una función para después encapsularse en un nuevo objeto matemático que es la función derivada.

La reformulación del tipo de problemas π_1 formulado por D. Tall en términos de la teoría APOS permite así obtener un nuevo tipo de problemas de investigación π_2 que pueden considerarse como «próximos» (especialmente cuando se compara con el ejemplo anterior).

1.2. Diálogo partiendo del componente *teórico* de las PI

Si intentamos enriquecer una praxeología de investigación integrando en ella, de manera mecánica, nociones extraídas de otra PI (lo que podemos designar como «eclecticismo teórico») aparecen dificultades porque las nociones construidas en una PI solo toman sentido en un sistema conceptual concreto, dependiente de una problemática específica. Estas dificultades se han puesto claramente de manifiesto cuando, por ejemplo, se ha pretendido integrar la noción de situación didáctica, construida dentro de la TSD, en otros enfoques teóricos que no comparten ni los compromisos ontológicos, ni las normas metodológicas, ni la problemática didáctica de la TSD.

Dada la preponderancia cultural de la teoría Θ sobre el resto de los componentes de la PI (que llega al extremo de identificar dicho componente de la PI con la PI globalmente considerada), si se inicia el diálogo partiendo del componente teórico se corre el peligro de no involucrar en el diálogo al resto de los componentes de la PI. Aunque realmente es muy importante contrastar y comparar los *postulados* *básicos* de ambas PI así como sus respectivas unidades de análisis (entre otras cosas porque esta comparación comportará un esfuerzo de explicitación), no será posible avanzar en el diálogo sin alcanzar el resto de los componentes de las PI y, muy especialmente, si no intervienen en el diálogo las *técnicas*, la *tecnología de investigación* y los *problemas* que constituyen el corazón de la PI.

Así, por ejemplo, un trabajo en torno del «networking theories» (Arzarello, Bosch, Gascón & Sabena, 2008) muestra claramente las limitaciones del diálogo entre dos teorías cuando este se centra únicamente en una de las dimensiones de la problemática didáctica. En efecto, en dicho trabajo, al intentar comparar el papel que juega la *dimensión ostensiva* en dos enfoques didácticos (la TAD y el APC-*space*), surgió la necesidad de ampliar el ámbito de discusión a fin de que este contuviese otras dimensiones fundamentales de los fenómenos didácticos (singularmente las dimensiones epistemológica e institucional). Al mismo tiempo se puso de manifiesto que las teorías didácticas, como teorías científicas relativamente autónomas, tienen necesidad de modificar, en coherencia con su marco teórico específico, los conceptos importados del ámbito de la semiótica, al igual que los importados de cualquier otra disciplina (ya sea la epistemología, la psicología o la sociología).

De todos modos, las limitaciones descritas para esta segunda modalidad de diálogo no invalidan la posibilidad de dar un paso atrás (en este caso desde el sistema conceptual explícito de una PI) y preguntarse en qué forma las intuiciones o principios básicos, y a menudo implícitos, de PI_1 pueden reinterpretarse para ayudar a desarrollar la lógica interna de PI_2 sin violentarla, y recíprocamente. Aunque esta modalidad de diálogo entre dos PI constituya solo un punto de partida, debemos resaltar que, en ocasiones, es la única vía para iniciarlo.

1.3. Diálogo partiendo de los componentes técnico y tecnológico

Podríamos decir que las *técnicas* y la *tecnología de investigación* recubren lo que habitualmente se denomina la «metodología de investigación», aunque sin reducirse a ella. En efecto, en el lenguaje de las PI que estamos utilizando, las técnicas de investigación son descritas, justificadas, interpretadas y generadas por los resultados tecnológicos que la PI formula y que toman la forma de «teoremas», «leyes», «fenómenos» o, en general, «regularidades» que constituyen el contenido más visible y explícito de una disciplina científica: el de los «resultados». Parafraseando a Descartes podríamos decir que, cuando una PI resuelve un problema, se obtiene un «resultado» que, debidamente interpretado (y, en algunos casos, adecuadamente generalizado), permite generar nuevas técnicas de investigación útiles para obtener nuevos resultados. De esta manera la noción de *tecnología de investigación* permite clarificar la relación, habitualmente bastante oscura, entre una «teoría científica» (PI en nuestro lenguaje) y su «metodología de investigación» (ver, por ejemplo, la contribución de Michèle Artigue, Marianna Bosch y Josep Gascón en este mismo volumen).

Esta modalidad de diálogo entre dos PI, que parte de los «resultados» que una PI formula y de la metodología científica utilizada para obtener dichos resultados, es la modalidad más habitual de diálogo en las comunidades científicas «maduras», donde hay generalmente un paradigma dominante y en las que se toman en consideración los resultados provisionales de la investigación para compartirlos, debatirlos y validarlos conjuntamente en el seno de la comunidad. Sin embargo, en el caso de las PI en didáctica de las matemáticas, se trata de una modalidad de diálogo poco frecuente en los trabajos que abordan el tema de *networking theories* (Prediger et al., 2008, 2010). En general, no se suele discutir sobre la manera cómo una PI utiliza o interpreta un resultado obtenido por otra PI, ni sobre la forma de retomar una metodología de investigación de otra PI, ni sobre la comparación entre los resultados obtenidos por dos PI, incluso cuando estos pudieran aparecer como contradictorios (ver, como contraste, Bikner-Ahsbahs et al., 2010; Kidron et al., 2008; Artigue, 2009; y, dentro de la modalidad de diálogo entre teorías «cercanas», Artigue, Bosch, Gascón & Lenfant, 2010).

2. Diálogo APOS-TAD partiendo del componente teórico: cuestionamiento de la matemática escolar

En lo que sigue nos proponemos desarrollar y sistematizar un diálogo que se inició en el año 2001 con un trabajo de cooperación entre los autores de este artículo y que se recoge en Josep Gascón (2003). Se trata del diálogo entre la teoría APOS cuyas principales aportaciones se describen en diversos trabajos (Dubinsky, 1991, 1996; Asiala et al., 1996; Czarnocha et al., 1999; Dubinsky & Mc Donald, 2001; Trigueros, 2005; Trigueros & Oktaç, 2005) y la TAD (Chevallard, 1992, 1997, 1999, 2007; Chevallard, Bosch & Gascón, 1997; Bosch & Gascón, 2005, 2006). Veremos que, a pesar de sus limitaciones, las tres modalidades de diálogo anteriormente descritas pueden ser fructíferas para el desarrollo interno de cada una de estas PI, siempre y cuando hagamos el esfuerzo de integrar en el diálogo todos los componentes de cada una de ellas.

La teoría APOS y la TAD son dos praxeologías de investigación en didáctica de las matemáticas que incorporan el análisis de la matemática escolar como parte de su problemática. Esto significa que, cuando abordan un problema didáctico, ambas PI cuestionan, entre otras cosas, la forma en que los programas, los libros de texto y las instituciones docentes describen las matemáticas a enseñar. Para llevar a cabo este cuestionamiento, construyen alternativas a las mismas como parte de su metodología de investigación. En este sentido, puede decirse que ambas PI toman la propia matemática como parte de su objeto de estudio. Este es un postulado común muy importante que nos ha servido como punto de partida del «diálogo» que hemos empezado a establecer.

La teoría APOS es una teoría basada en las ideas de la epistemología genética de Piaget. Su objeto primario de investigación es el aprendizaje de las matemáticas en la escuela o, dicho de otro modo, la construcción del conocimiento matemático por un alumno que puede considerarse como genérico de una institución de educación superior. Según APOS, en la práctica matemática que tiene lugar en el ámbito escolar, las relaciones que los sujetos establecen con las matemáticas no tienen por qué coincidir con las que se establecen en el ámbito de la investigación en matemáticas ni con las que tienen lugar en las instituciones en las que se utilizan las matemáticas de diversas maneras. Es importante entonces modelizar los distintos desarrollos de la actividad matemática que pueden llevar a cabo los estudiantes con el fin de determinar una evolución de esta actividad que sea, sino óptima, al menos eficaz en términos del aprendizaje de los alumnos bajo ciertas restricciones institucionales (de acuerdo a la definición de «aprendizaje de las matemáticas» dentro de la misma teoría).

La teoría APOS considera que es necesario elaborar, desde la didáctica, modelos que describan la forma en la que los estudiantes construyen los elementos de un determinado ámbito del conocimiento matemático. Estos modelos se explicitan a través de lo que en dicha PI se conoce como «descomposición genética» del concepto o ámbito matemático que está en juego (Dubinsky & Lewin, 1986; Dubinsky et al., 1992; Dubinsky & Harel, 1992). La descomposición genética consiste en la descripción detallada de la manera en que un alumno, que podemos considerar como un «alumno genérico», podría construir dichas ideas matemáticas como acciones, procesos, objetos y esquemas cognitivos.

La noción de «alumno genérico» de una institución determinada podría ser útil como punto de contacto para ambas PI. En efecto, en el caso de la TAD la noción de alumno genérico podría asimilarse a la noción de «sujeto en posición de alumno», que no debe confundirse con la noción de «persona» considerada como el emergente del conjunto de sujeciones institucionales que un individuo trae consigo (Chevallard, 1989). En el caso de la teoría APOS, se habla simplemente del alumno para referirse al alumno genérico. Veremos cómo dicha noción permitirá tomar en consideración la incidencia de la interpretación institucional de un concepto sobre la descomposición genética del mismo en dicha institución.

Sobre la base de la descomposición genética, considerada como modelo preliminar, los investigadores diseñan actividades didácticas específicas para promover dichas construcciones. Es importante aclarar que no hay una única descomposición genética; dado que dicha descomposición es un modelo general, distintos investigadores pueden proponer descomposiciones genéticas diversas, pero, una vez que estas se proponen, es necesario verificar su validez a través de los datos sobre la forma en que los estudiantes trabajan con estos problemas matemáticos relacionados con el concepto o ámbito de interés. A menudo, los datos ponen de manifiesto construcciones distintas a las previstas en el modelo y, en ese caso, es necesario revisar y refinar el modelo. Así, la descomposición genética sirve como base para el diseño de actividades que los alumnos trabajan en el salón de clase y sirve, también, como un modelo a priori para analizar cuáles de esas construcciones pueden inferirse de la actividad de solución de problemas de los alumnos, en un proceso de estudio que incluye los conceptos en cuestión, ya sea mediante actividades diseñadas con la propia descomposición genética o a través de otro tipo de cursos.

A lo largo de los años, la teoría APOS se ha enriquecido a partir de los resultados de investigaciones sobre la construcción de distintos conceptos matemáticos. Las nociones originales de la teoría se han ampliado. La necesidad de considerar los cambios que se producen en los esquemas de un sujeto genérico conforme avanza en el proceso de estudio, condujo a la introducción de la nociones de «evolución de un esquema» y de «tematización de un esquema» (Clark et al., 1997; Baker et al., 2000; McDonald et al., 2000; Cooley et al., 2007; Parraguez & Oktaç, 2009; Trigueros & Martínez-Planell, 2010). Además la teoría se ha visto fortalecida a través de investigaciones que han puesto de manifiesto el éxito de su aplicación en la enseñanza de conceptos específicos o de cursos completos (Vidakovic, 1997; Dubinsky & McDonald, 2001; Weller et al., 2003; Trigueros, Oktaç & Manzanero, 2007; Salgado & Trigueros, 2009; Campero & Trigueros, 2010).

La TAD, por su parte, puede ser considerada como un desarrollo del programa epistemológico de investigación en didáctica de las matemáticas iniciado por la TSD (Gascón, 1998, 2003). A medida que este programa se iba desarrollando, se puso de manifiesto que no era posible interpretar adecuadamente la actividad matemática escolar sin tener en cuenta los fenómenos relacionados con la reconstrucción escolar de las matemáticas, que tienen su origen en la propia institución productora del saber matemático. Aparecieron así los fenómenos de transposición didáctica (Chevallard, 1985) en el corazón de la problemática didáctica y la noción de relatividad institucional del saber matemático.

Como consecuencia de ello, la actividad matemática institucionalizada se convirtió en el objeto primario de investigación para la TAD. Con más precisión, la TAD postula que el objeto primario de estudio de la didáctica de las matemáticas no es otro que la *ecología institucional* de las organizaciones matemáticas y didácticas asociadas y, por lo tanto, cuestiona y modeliza los procesos de génesis y difusión intra-institucional e inter-institucional de las praxeologías, no los procesos cognitivos ni del alumno ni del profesor.

Para llevar a cabo este programa se requiere explicitar un modelo epistemológico de las matemáticas que sirva como referencia (siempre relativa y provisional) para analizar en cada caso la actividad matemática institucionalizada. Los modelos así producidos son lo que designamos como «modelos epistemológicos de referencia» (MER). Estos modelos se describen en términos de praxeologías (matemáticas y didácticas) y constituyen, en cierto sentido, el núcleo firme de la TAD (Bosch & Gascón, 2005, 2006).

En este punto aparece un importante paralelismo entre la noción de «descomposición genética» (DG) que permite describir la construcción de un concepto o ámbito matemático en APOS, y la noción de «modelo epistemológico de referencia» (MER) que se utiliza en la TAD para describir, analizar y evaluar los modelos epistemológicos de las matemáticas dominantes en las diferentes instituciones que forman parte de su objeto de estudio.

Al igual que la noción de descomposición genética, el MER es un modelo relativo y provisional (una hipótesis) que describe la estructura de una praxeología matemática institucionalizada y propone un proceso hipotético de construcción institucional de dicha praxeología. Hay que decir que, en los trabajos llevados a cabo hasta la fecha en el ámbito de la TAD, raramente se explicitan los criterios que se han utilizado en la elaboración del MER, criterios que quedan normalmente bajo la responsabilidad privada del investigador (Sierra, 2006), mientras que en los trabajos realizados en el ámbito de la teoría APOS, suelen explicitarse claramente tanto las construcciones consideradas en la descomposición genética como los criterios con los que se elaboran las actividades de enseñanza. Dado que la comunidad científica que trabaja en el ámbito de la teoría APOS tiene mucha experiencia en el aprovechamiento de los datos provenientes de las actividades de los alumnos para refinar las descomposiciones genéticas, sus propuestas podrían ayudar a desarrollar la metodología de la TAD, proporcionando estrategias para utilizar sistemáticamente dichos datos como criterio complementario para contrastar y modificar progresivamente los MER considerados.

Dicho esto, si comparamos ahora la forma como cada una de estas dos PI lleva a la práctica este postulado, esto es, si cotejamos la manera concreta en que cada una de ellas toma efectivamente la matemática como parte de su objeto de estudio, observaremos dos puntos de divergencia. En primer lugar, la TAD pone el acento en el nivel institucional de la construcción del conocimiento matemático, remarcando la preeminencia explicativa de la «relación institucional» a los objetos matemáticos por encima de la «relación personal» a dichos objetos. Esto es, en la TAD se considera que la actividad matemática que un sujeto de una institución docente puede llevar a cabo (en torno a un ámbito determinado de las matemáticas) —es decir, las prácticas personales que se estructuran en la praxeología personal— está fuertemente condicionada por el tipo de actividad (las prácticas institucionales) que es posible llevar a cabo en la institución en relación al mismo ámbito de las matemáticas. En otras palabras, las praxeologías personales son un reflejo, más o menos deformado, de las correspondientes praxeologías institucionales (que, a su vez, contribuyen a construir).

En cambio, en la teoría APOS se enfatiza el nivel personal de la construcción del conocimiento matemático, aunque podamos interpretar que lo que se toma en consideración es el «alumno genérico de la institución» en lugar del alumno concreto. En efecto, la teoría APOS, con base en la dialéctica sujeto versus objeto de conocimiento de la epistemología de Piaget, defiende la unidad indisoluble de los aspectos «matemático» y «cognitivo» de los componentes básicos del modelo (*acciones*, *procesos*, *objetos* y *esquemas*) que forman parte de su núcleo firme.

Sin embargo, el nivel institucional también está presente en los estudios realizados desde esta perspectiva. En efecto, las construcciones y los mecanismos de construcción del conocimiento matemático que se toman como punto de partida se materializan en un conjunto de actividades o tareas matemáticas que se usan en la enseñanza, es decir en un contexto institucional concreto (Asiala et al., 1996; Trigueros y Oktaç, 2005; Weller et al., 2002). Este componente «didáctico» de la PI, que se denomina el ciclo ACE (Actividades, Discusión en Clase, Ejercicios), quizás menos conocido, es lo que permitiría integrar el nivel institucional en la teoría APOS.

En segundo lugar, el modelo epistemológico de la teoría APOS propone una interpretación de las matemáticas que enfatiza su descomposición en «conceptos» o, mejor dicho, en redes o sistemas de conceptos matemáticos, aunque es importante destacar que dado que el foco de la teoría es el aprendizaje de los sujetos genéricos, la actividad de los mismos al enfrentar tareas matemáticas específicas es un componente importante de la teoría. Es dicha actividad y, en particular, la reflexión sobre la propia actividad el mecanismo (*abstracción reflexiva*) que permite la construcción de los conceptos matemáticos descritos en la descomposición genética.

En los estudios llevados a cabo hasta este momento con la teoría APOS, se ha centrado la atención en el aprendizaje de las matemáticas a nivel universitario. Es posible que, dado que se ha tomado en consideración esta única institución, las restricciones específicas que la institución puede poner a la actividad diseñada no han sido introducidas en la teoría. En las investigaciones se mencionan, sin embargo, algunas consideraciones acerca de la institución en la que los estudios se llevan a cabo. La teoría APOS empieza a utilizarse para investigar la construcción de ideas matemáticas fuera de la universidad; es en estos estudios y en la comparación con los previos realizados a nivel universitario donde las restricciones institucionales pueden aparecer de manera más explícita.

La TAD por su parte propone un modelo epistemológico que pone el acento en la actividad matemática como una actividad humana institucionalizada y en la que los sistemas de conceptos, teoremas y demás objetos matemáticos se consideran componentes de las praxeologías matemáticas que aparecen organizadas en dos niveles. El primer nivel es el que remite a la práctica que se realiza, la *praxis* o *saber-hacer*, es decir, los *tipos de problemas* o *tareas* que se estudian y las *técnicas* que se construyen y utilizan para abordarlos. El segundo nivel recoge la parte descriptiva, organizadora y justificadora de la actividad, que llamamos *logos* o, simplemente, *saber*. Incluye las descripciones y explicaciones que se elaboran para hacer inteligibles las técnicas, esto es, el discurso *tecnológico* (la «razón», *logos*, de la técnica y, en última instancia, el fundamento de la producción de nuevas técnicas) y la *teoría* que da sentido a los problemas planteados, permite interpretar las técnicas y fundamentar las descripciones y demostraciones tecnológicas.

En la TAD, la actividad de construcción y reconstrucción institucional de praxeologías matemáticas, que constituye la dinámica del modelo epistemológico propuesto, es una actividad humana y como tal también puede describirse mediante praxeologías que, en este caso, se denominan praxeologías didácticas. La consideración de diversos procesos de construcción matemática permite detectar aspectos invariantes presentes en todos ellos; esto es, *momentos didácticos* que estructuran cualquier proceso de elaboración matemática independientemente de sus características culturales, sociales, individuales o de otra índole. La noción de «momento didáctico» se utiliza, no tanto en el sentido cronológico como en el sentido de dimensión de la actividad. Así, el proceso de estudio se sitúa en un espacio determinado por seis momentos didácticos o momentos del proceso de estudio (Bosch, Espinoza & Gascón, 2003).

A pesar de esta aparente disparidad, la teoría APOS formula siempre la descomposición genética de los objetos matemáticos en términos de *acciones* de las personas que llevan a cabo la actividad matemática y, tanto en los textos desarrollados como en las actividades diseñadas para la investigación y para la enseñanza, estas acciones se explicitan en términos de tareas matemáticas específicas y de actividades que permiten la interiorización de dichas acciones en procesos, su encapsulación en objetos o su tematización en esquemas. Las primeras dos fases del ciclo ACE, consisten, justamente, en la promoción del trabajo colaborativo de los estudiantes con esas actividades específicas y la discusión, tanto entre los estudiantes cuanto con el profesor, para promover, en la medida de lo posible, que la mayor parte de los estudiantes haga las construcciones predichas por el modelo. Esta interpretación muestra que, en realidad, los modelos epistemológicos de las matemáticas que sustentan ambas PI no están tan alejados como podría parecer a primera vista.

3. Diálogo entre APOS y TAD partiendo de los componentes técnico y tecnológico

Es importante comentar, antes que nada, que la teoría APOS y la TAD son PI «jóvenes» en pleno periodo de desarrollo y, por lo tanto, muy incompletas. Cada una de ellas puede beneficiarse, para su propio desarrollo, de la reinterpretación de algunos de los «resultados» y de la metodología de la otra PI tal como hemos descrito en la tercera modalidad del diálogo entre PI (sección 1.3). Esta posibilidad se acrecienta[1] gracias a que ambas PI coinciden, como hemos visto, en integrar la matemática «escolar» como parte de su objeto de estudio.

Veremos que las ideas acerca de los tipos de concepción (*acción*, *proceso* y *objeto*) desarrollados por APOS, adecuadamente reinterpretadas, pueden ser de utilidad para caracterizar el grado de desarrollo de las técnicas que se utilizan en una institución (según la terminología de la TAD), mientras que las ideas acerca de los niveles sucesivas de desarrollo de los esquemas (*intra-, inter-, trans-*) que propone APOS aportan elementos para precisar los grados de completitud de las praxeologías en la TAD. Recíprocamente, el principio de la *relatividad institucional del saber* que aparece en la TAD ligado a la teoría de la transposición didáctica, puede ser reinterpretado para generalizar el papel que tiene actualmente la descomposición genética en la teoría APOS. Por otra parte, el ciclo ACE de enseñanza propuesto en APOS podría describirse de una manera más detallada utilizando una reinterpretación de la teoría de los momentos didácticos desarrollada por la TAD. En todos, los casos se respeta la lógica interna de cada una de las PI ampliando su ámbito de aplicación y en ningún caso se tiene la pretensión de incorporar directamente las nociones de una PI en otra sin la necesaria adecuación.

1. Una situación similar, y todavía en mayor grado, se da entre la TAD y la TSD, debido a que ambas comparten muchos de sus principios básicos y forman parte del mismo programa de investigación.

3.1. Desarrollo institucional de las técnicas en la TAD reinterpretando los niveles de conceptualización de la APOS

En la TAD se parte de la práctica matemática institucionalizada, esto es, de las *tareas* y las *técnicas* matemáticas que se llevan a cabo efectivamente en una institución, para intentar describir la actividad matemática en su globalidad. De las *praxeologías puntuales* generadas por un único tipo de tareas se pasa, por agregaciones sucesivas, a las *praxeologías locales* (cada una de las cuales está caracterizada por una *tecnología*) y, progresivamente, a las *regionales* (centradas en una *teoría*) (Chevallard, 1999).

En lo que sigue, utilizaremos una reformulación de los tipos de concepción (acción-proceso-objeto) que la teoría APOS propone, para describir los niveles progresivos de desarrollo institucional de las técnicas matemáticas, tomando aquí la noción de técnica matemática en el sentido de la TAD.[2]

(1) Diremos que una técnica τ se propone como *acción* (o aparece como *técnica-acción*) en una institución I, en la medida en que en I dicha técnica aparezca:

- (a) Como una sucesión de acciones *arbitrarias*, esto es, acciones para las que no se plantea, en I, ninguna necesidad de justificación hasta el punto que τ aparece en I como justificación de sí misma simplemente porque, supuestamente, «funciona».
- (b) Como una técnica *rígida*, lo que se pone de manifiesto si en I no aparece ningún tipo de variación de τ.
- (c) Como una técnica que se aplica a actividades *aisladas*, lo cual se manifiesta en el hecho que τ siempre se pone en práctica en I para realizar un tipo muy concreto, preestablecido y aislado de tareas y nunca se mezcla ni compone con otras técnicas para constituir técnicas más complejas.

2. La TAD distingue entre desarrollo *institucional* de una técnica, que se manifiesta en la manera cómo es posible poner en práctica dicha técnica en la institución en cuestión, y el desarrollo *personal* de dicha técnica, que siempre tiene que referirse y evaluarse en relación al correspondiente desarrollo institucional.

(2) Diremos que una técnica τ se propone como *proceso* (o aparece como *técnica-proceso*) en una institución I, en la medida en que en I dicha técnica:

   (a) Pueda ser *descrita, interpretada y justificada* mediante un discurso tecnológico-teórico que esté *disponible* en I y cuya incidencia sobre el funcionamiento efectivo de τ en la práctica matemática sea (al menos potencialmente) relevante.

   (b) Sea *flexible*, lo que se manifiesta en que, en I, existan variaciones de τ que se obtienen modificando (y, en particular, simplificando) el repertorio de gestos que forman parte de τ (o su orden de realización). Estas variaciones pueden tener por objetivo economizar su puesta en práctica para llevar a cabo determinadas tareas o aumentar su ámbito de validez, entre otros. Un rasgo importante de flexibilidad es la existencia en I de la técnica inversa de τ para abordar la tarea inversa (Bosch, Fonseca y Gascón, 2004).

   (c) Se *articule o coordine con otras técnicas* para formar técnicas más complejas que, normalmente, permiten llevar a cabo en I otros tipos de tareas más generales que los que podían llevarse a cabo con τ.

(3) Diremos que una técnica τ se propone como *objeto* (o aparece como *técnica-objeto*) en una institución I, en la medida en que en I dicha técnica se tome efectivamente como objeto de estudio en sí misma. Esto significa que en I aparecen explícitamente tareas matemáticas (y técnicas matemáticas para abordar dichas tareas y un discurso tecnológico-teórico asociado a dicha práctica) para responder a *cuestiones relativas a* τ (dichas cuestiones se denominan *tecnológicas* respecto de τ). Así, deben aparecer en I tareas matemáticas cuya realización permita responder a cuestiones relativas al dominio de validez y a la economía de τ, a la relación entre τ y otras técnicas, a la interpretación de los resultados que se obtienen al poner en práctica τ, a la justificación del porqué τ proporciona los resultados que proporciona, etc. (Bosch, Fonseca & Gascón, 2004).

De la anterior reinterpretación de la caracterización que hace la teoría APOS de los diferentes tipos de concepciones en términos de los niveles de desarrollo de las técnicas institucionales, en el sentido de la TAD, se deduce que estos, más que constituir niveles claramente diferenciados y definidos de desarrollo institucional de las técnicas, forman parte de un *continuo* que describe el *proceso de desarrollo institucional de las técnicas* porque las características (a), (b) y (c) no son absolutas, sino una cuestión de grado.

Todos los niveles intermedios (entre la *técnica-acción* y la *técnica-objeto*) de desarrollo institucional de una técnica representarán tipos de *técnicas-proceso* más o menos próximos a uno u otro extremo. Es lógico pensar, desde este punto de vista, que dicho continuo se manifestará igualmente en las prácticas matemáticas llevadas a cabo por los sujetos de la institución. Por lo tanto, si una técnica τ, en una institución I, aparece como *técnica-objeto*, entonces en la práctica matemática de los sujetos de I, τ también puede utilizarse como *técnica-proceso* y hasta como *técnica-acción*. Por el contrario, si el desarrollo institucional de una técnica τ no sobrepasa el nivel de *técnica-acción*, entonces los sujetos de I estarán fuertemente condicionados a utilizar τ casi exclusivamente como *técnica-acción* (Bosch, Fonseca & Gascón, 2004).

3.2. La evolución de los esquemas, los niveles *intra-inter-trans* y el desarrollo de las praxeologías

Reformulando otro de los resultados básicos de APOS, podríamos considerar que los esquemas personales (o, mejor, los esquemas del alumno genérico) se ponen de manifiesto mediante la práctica matemática (institucionalizada) que lleva a cabo el sujeto en cuestión y que dicha práctica, como todas, puede describirse desde el punto de vista de la TAD mediante una praxeología que, en este caso, denominaremos «praxeología del sujeto genérico» (de la institución de referencia). Así, mientras que desde el punto de vista de la teoría APOS la evolución de los esquemas muestra el desarrollo personal de los conceptos matemáticos, desde la perspectiva de la TAD se considera que el desarrollo de las praxeologías del sujeto genérico de una institución (que modelizan las prácticas matemáticas que emergen de los esquemas) está fuertemente determinado por las praxeologías institucionales. Así, mientras que ante una práctica matemática concreta de un estudiante, la teoría APOS intenta vislumbrar cuál es la estructura y las características del esquema que puede entreverse a través de dicha práctica, la TAD intenta describir la actividad matemática desarrollada por el estudiante en términos praxeológicos y en referencia a las praxeologías institucionales. No hay, en principio, ninguna contradicción aparente entre ambas ambiciones.

Con esta interpretación de la práctica matemática que emerge de un esquema como una práctica describible mediante una praxeología (o mediante componentes praxeológicos más o menos coherentes entre sí), podemos reformular los diferentes niveles de desarrollo de los esquemas (APOS) a fin de proponer una evolución institucional de las praxeologías (TAD) que permita desarrollar la lógica interna de la TAD sin violentarla. Para ello utilizaremos las caracterizaciones que hace APOS de los niveles de desarrollo de los esquemas para identificar las transformaciones que sufren las praxeologías que describen la práctica matemática emergente de un esquema, cuando este recorre los sucesivos niveles de desarrollo.

La teoría APOS define los mecanismos de evolución de un esquema mediante los tres niveles siguientes (Dubinsky & McDonald, 2001):

> *Intra*-: Caracterizado por el foco en un objeto y sus relaciones internas de manera aislada, esto es, independiente de otros objetos cognitivos de la misma naturaleza.
>
> *Inter*-: Caracterizado por la construcción de relaciones y transformaciones entre esas entidades cognitivas. En este nivel el individuo agrupa ítems e incluso los llama con el mismo nombre.
>
> *Trans*-: El individuo construye una estructura subyacente de manera implícita o explícita para comprender las relaciones construidas en el nivel *inter*-. Dicha estructura da coherencia al esquema mediante la posibilidad de decidir qué pertenece al ámbito del esquema y qué no.

Desde el punto de vista de la TAD se podrían relacionar estos niveles con la dinámica de construcción y desarrollo de las praxeologías, destacando especialmente el papel que juegan las técnicas y las tecnologías en esta dinámica. Este estudio se podría llevar a cabo en términos de los sucesivos niveles de amplitud de las praxeologías (paso de puntual a local, de local a regional, etc.) y sus grados de completitud (Bosch, Fonseca & Gascón, 2004). El objetivo sería intentar describir el tipo de dinámica praxeológica que interviene en los niveles de desarrollo de los esquemas en una institución dada. En concreto, proponemos las siguientes relaciones:

- Los esquemas que se asocian al nivel *intra-* permiten llevar a cabo una actividad matemática describible mediante una colección de *praxeologías* aisladas (que, en un caso límite, pueden reducirse a una única praxeología) e incluso al componente práctico de estas praxeologías. Estas praxeologías aisladas suelen estar generadas por técnicas que aparecen como *técnicas-acción* en la institución en cuestión y, en un caso límite, se reducen al bloque práctico de una praxeología *puntual*.
- Los esquemas que se asocian al nivel *inter-* requieren que se disponga de elementos tecnológicos que corresponden a una colección de *praxeologías* al menos *locales* y relativamente completas. En un caso límite, la práctica matemática emergente podría describirse mediante una única praxeología matemática local. Entre las técnicas que se ponen en juego en la práctica matemática asociada al nivel *inter-*, algunas deben aparecer en la institución en cuestión al menos como *técnicas-proceso.*
- Y, por último, los esquemas que se asocian al nivel *trans-* en una institución determinada requieren de un segundo orden de interpretación y justificación que, en la dinámica praxeológica, se situaría en el nivel de la teoría. La explicitación o utilización de elementos teóricos permitiría llevar a cabo una práctica matemática que podría describirse mediante una colección de praxeologías íntimamente relacionadas entre sí que pueden dar origen a una o más praxeologías *regionales*. Entre las técnicas que se ponen en juego en la práctica matemática asociada al nivel *trans-*, algunas deben aparecer en la institución como *técnicas-objeto.*

Esta reinterpretación de la evolución de los esquemas aplicada al desarrollo de las praxeologías, muestra que no es posible separar de manera claramente diferenciada las praxeologías puntuales de las locales, ni distinguir nítidamente las praxeologías locales de las regionales. En consecuencia, tampoco es fácil *precisar* con exactitud el grado de completitud de las praxeologías. Además de la relatividad institucional de estas nociones, resulta que las características definitorias de los niveles de amplitud y de los grados de completitud de una praxeología no son absolutas, sino una cuestión de grado (Bosch, Fonseca & Gascón, 2004).

Algo similar sucede con la caracterización de los niveles *intra-*, *inter-* *trans-*: tampoco estos niveles son absolutos ni pueden delimitarse con precisión. Además, al considerarse distintos ámbitos matemáticos, lo que en uno corresponde al nivel *trans-* puede situarse en el nivel *intra-* del otro (Baker, Cooley & Trigueros, 2000; Trigueros, 2005; Cooley, Trigueros & Baker, 2007).

3.3. La relatividad institucional de la TAD y la descomposición genética de APOS

Una gran parte de la investigación en el ámbito de la teoría APOS se ha centrado en la modelización y análisis de la forma como los alumnos construyen conocimiento matemático, como paso previo para el diseño de actividades de enseñanza que constituye la base experimental de los esquemas propuestos en la descomposición genética. Hasta hoy, muchas investigaciones han abordado este gran tipo de problemas con alumnos de nivel universitario. Podría considerarse que, tal vez, a diferencia de la enseñanza primaria y secundaria, el modelo de enseñanza universitaria es mucho más uniforme en las distintas instituciones, aunque también aquí existen diferencias institucionales que pueden influir en la forma de organizar la enseñanza y el aprendizaje. Creemos que si se tomara en consideración la dimensión institucional, mediante un análisis a través de nociones adaptadas de la TAD, se podría desarrollar el modelo de enseñanza formulado a partir de la descomposición genética.

Si se considera, como se ha hecho ya en algunos estudios, que la forma en la que los alumnos aprenden matemáticas en niveles distintos al universitario y la construcción de conceptos matemáticos elementales por parte de los futuros profesores puede modelarse, aunque sea parcialmente, utilizando las nociones de la teoría APOS (Arnon, 2001; Brown et al., 2001; Zazkis & Campbell, 1996; Zazkis & Gunn, 1997), la necesidad de tomar en cuenta el papel de la institución en el diseño de la descomposición genética sería más evidente, dado que la incidencia institucional es mucho más variada en los niveles escolares distintos a la universidad. En APOS se considera que la descomposición genética no es única, como se ha mencionado anteriormente: distintos investigadores podrían diseñar descomposiciones genéticas diferentes de un mismo concepto o dominio matemático, tomando como punto de partida su experiencia sobre las construcciones que son necesarias en el aprendizaje de un concepto o un ámbito de las matemáticas. Se podría entonces considerar el diseño de una *descomposición genética de un concepto relativa al alumno de una institución dada.*

Supongamos, por ejemplo, que se desea estudiar la forma en que el alumno genérico construye el concepto de derivada. Está claro que lo que se desea que aprenda un alumno genérico de una universidad respecto a este concepto es diferente a lo que se desea que aprenda un estudiante de nivel medio. En estos términos, es posible afirmar que el concepto de derivada en el ámbito escolar no es un concepto absoluto, en el sentido de lo que se desea enseñar y de lo que se pretende que los alumnos aprendan. El modelo de enseñanza basado en la teoría APOS requeriría de la elaboración de una descomposición genética distinta en un caso y en otro. Más aún, aunque la descomposición genética a utilizar fuera la misma, muy posiblemente se consideraría importante brindar al estudiante universitario oportunidades de hacer todas las construcciones incluidas en ella, mientras que en el caso de los alumnos de nivel medio se haría énfasis en actividades que les ayudarían a construir únicamente una parte de ellas; en ese sentido se puede considerar que el modelo de construcción del conocimiento depende de la institución considerada.

La relatividad institucional de la descomposición genética se pone de manifiesto con mayor claridad cuando se utiliza en el diseño de las actividades a desarrollar en clase relacionadas con las construcciones propuestas en el modelo. En el ejemplo considerado, las actividades para los estudiantes del bachillerato no harán ninguna referencia a las ecuaciones diferenciales; sin embargo, en una descomposición genética del concepto de derivada para un curso universitario de biología las construcciones asociadas a ellas aparecerán inevitablemente y de manera relevante. Al tomar en consideración la relatividad institucional de la descomposición genética de un concepto, la teoría APOS ampliaría su problemática sin contradecir ninguno de sus fundamentos.

En resumen, creemos que, por una parte, el uso sistemático de la noción de «alumno genérico» en la teoría APOS permitiría estudiar la descomposición genética de un concepto relativa al alumno genérico de una institución. Por otra parte, aunque APOS habla de «concepto matemático», lo que en realidad se propone son «prácticas matemáticas en torno a un concepto derivadas de la descomposición genética». Y estas prácticas tienen estructura praxeológica en términos de la TAD. El análisis de dicha estructura podría completar también el análisis que se hace desde la teoría APOS en las investigaciones sobre el aprendizaje de los alumnos. Si en lugar de hablar de «descomposición genética de un concepto» se considerara la descomposición genética de un «ámbito de la actividad matemática» (cosa que, de hecho, parece implícita en la primera expresión), entonces tendríamos, de nuevo, una ampliación del actual punto de vista de la teoría APOS que la aproximaría a la TAD.

3.4. Relación entre el ciclo ACE y los momentos del estudio

La descripción de las organizaciones didácticas en términos de las dimensiones o momentos del estudio que propone la TAD puede utilizarse también para analizar las actividades didácticas que se diseñan para el ciclo ACE y detectar si existe algún tipo de proceso didáctico privilegiado por el uso de la teoría APOS en el diseño de materiales de enseñanza, así como sugerir nuevas propuestas congruentes con la descomposición genética asociada.

Las actividades que se diseñan con la descomposición genética tienen como propósito brindar a los alumnos oportunidades de operar y reflexionar de manera que elaboren las construcciones que el modelo predice como necesarias para el aprendizaje del ámbito de las matemáticas en estudio. Los momentos del estudio permiten revisar dichas actividades, no ya en términos de su relación con la descomposición genética, sino en relación al papel que juegan dentro de la estructura de los procesos de estudio. Se podrá así buscar, en su diseño, tanto el desarrollo de las construcciones mentales que busca la teoría APOS como el equilibrio del proceso de estudio que promueve la TAD.

Entre las actividades diseñadas para llevar a cabo el ciclo ACE, se pueden distinguir algunas cuyo propósito consiste en promover que los estudiantes lleven a cabo las primeras acciones sobre objetos matemáticos conocidos, para iniciar el proceso de construcción de los nuevos objetos. También se encuentran actividades en las que se intenta brindar oportunidades a los alumnos de establecer relaciones nuevas entre objetos que, a los ojos del estudiante, no estaban relacionados. Estos dos tipos de actividades pueden considerarse como las primeras tareas que los estudiantes enfrentan en relación a los objetos matemáticos o esquemas que se desea construir. De la misma manera que en la TAD, su principal función puede entenderse como hacer «existir» la posibilidad de obtener nuevos resultados a partir de objetos conocidos, o de presentar esos nuevos objetos a los ojos de los alumnos. Para enfrentar estas tareas, que podrían considerarse dentro del *momento del primer encuentro* del ciclo ACE, los estudiantes trabajan en grupo y, en muchas ocasiones, con el apoyo de herramientas informáticas que permiten concretar de alguna manera los objetos abstractos con los que se trabaja en las matemáticas universitarias.

El *momento exploratorio* del ciclo ACE se puede pensar como aquel en el que los estudiantes realizan acciones sobre objetos matemáticos conocidos, reflexionan sobre estas acciones y pueden interiorizarlas en procesos. Podría pensarse que este momento se encuentra concentrado en la fase de actividades del ciclo de enseñanza de APOS, pero esto no es así. En la segunda fase del ciclo, la de discusión en clase, se reconsideran las actividades y se lleva a cabo una reflexión colectiva sobre las acciones realizadas y los resultados obtenido con el fin de apoyar la interiorización de las acciones en procesos. Lo mismo puede decirse de la finalidad de algunas actividades de la fase de ejercicios del ciclo ACE; en ella, el alumno se enfrenta a problemas no necesariamente diseñados a partir de la descomposición genética, con el fin de estimular la reflexión individual. Algunas de estas actividades se pueden relacionar con el desarrollo de lo que en la TAD se consideran técnicas, situándose así en el *momento del trabajo de la técnica*. Otras, en cambio, estarían relacionadas con la construcción de propiedades que permiten formular definiciones de los objetos matemáticos o relacionar distintos objetos en términos de sus propiedades. En este caso las actividades podrían considerarse como formando parte del *momento tecnológico-teórico*.

Entre las actividades que se diseñan siguiendo el modelo previsto por la descomposición genética, se pueden distinguir algunas cuyo objetivo consiste en contribuir a la interiorización de acciones en procesos o la coordinación de distintos procesos para construir nuevos procesos. Estas actividades podrían interpretarse como la producción de nuevas técnicas en el sentido de la TAD. Si bien algunos estudios en este ámbito ponen de manifiesto que en muchas instituciones no se cuenta con dispositivos para desarrollar esta dimensión de la actividad matemática, en el ciclo de enseñanza de la teoría APOS, y por la importancia que se da a la interiorización y a la coordinación de los procesos, este momento emerge con fuerza y es sumamente importante.

Con el momento tecnológico teórico se pueden identificar aquellas actividades en las que los procesos están relacionados con la interiorización de acciones que se orientan a la construcción de propiedades de objetos matemáticos, o con los procesos que permiten establecer relaciones entre distintos objetos para construir nuevos objetos o nuevos esquemas. También se pueden incluir aquellas actividades que promueven la encapsulación de procesos en objetos o la evolución de los esquemas. Nuevamente, conviene recalcar que las actividades relacionadas con los distintos momentos del estudio se presentan por primera vez en la fase de actividades del ciclo de enseñanza ACE, pero vuelven a aparecer en las otras fases para brindar a los estudiantes mayor oportunidad de reflexión.

Aquellas actividades que tienen como meta precisar las definiciones y los teoremas relacionados con los objetos construidos y trabajados en los distintos tipos de actividades, pueden relacionarse con el *momento de institucionalización* de la TAD. Es importante notar que este momento juega un papel muy importante en la fase de discusión en clase del ciclo ACE. Dicha discusión, como se mencionó anteriormente, se lleva a cabo entre el maestro y los alumnos en el salón de clase y uno de sus objetivos principales es, justamente, la institucionalización de los procesos y objetos construidos por los alumnos a través de la reflexión sobre su actividad matemática.

El *momento de la evaluación* del proceso didáctico corresponde a la dimensión del proceso de estudio que pone énfasis en los resultados del mismo y que permiten contrastar el aprendizaje de los estudiantes. En la aplicación de la teoría APOS este balance se lleva a cabo, por una parte, a través de la revisión de su trabajo en las diversas actividades y, por otra, a través de pruebas. En la enseñanza basada en la teoría APOS se incluyen pruebas tanto individuales como colectivas en las que los estudiantes trabajan en grupo. En el marco de la teoría APOS, la evaluación juega además un importante papel como herramienta para valorar la validez de la descomposición genética, es decir, para verificar si las construcciones predichas en el modelo diseñado producen efectivamente las construcciones deseadas. En caso de que la descomposición genética no resulte efectiva, los resultados obtenidos de la evaluación dan pistas que permiten refinar el modelo para una aplicación posterior.

Hasta ahora la teoría APOS ha centrado la atención en la relación dialéctica, personal o colectiva, de los sujetos con el objeto de conocimiento. Esta relación se ha descrito en términos de la actividad cognitiva de los individuos así como en términos de los cambios que dicha actividad cognitiva experimenta conforme se sigue el ciclo de enseñanza. No se cuenta con estudios en los que se analice la forma en que la actividad propuesta se lleva a cabo en instituciones específicas. Las herramientas de la TAD pueden permitir, además de la descripción y balance de las actividades propuestas en términos de los momentos del estudio, la valoración de la viabilidad de la descomposición genética en distintas instituciones, así como la comparación de las construcciones que dicha actividad permite en cada una de ellas. De esta manera, se podría tomar en consideración la relatividad institucional de los conocimientos matemáticos, lo que constituiría una ampliación del tipo de problemas que la teoría APOS puede abordar sin violentar su estructura interna.

4. El diálogo entre APOS y TAD: recapitulación y cuestiones pendientes

Hasta aquí hemos descrito dos modalidades de diálogo entre APOS y TAD que parten, respectivamente del componente teórico y de los componentes técnico y tecnológico de ambas praxeologías de investigación. Queda pendiente, para futuras investigaciones, retomar un trabajo que, partiendo de un problema de investigación didáctica construido por una de las PI, sea posible reformularlo con las herramientas teóricas y metodológicas que proporciona la otra PI ampliando así y profundizando la práctica científica de ambas.

Esta modalidad de diálogo presenta un grado de complejidad importante debido, precisamente, a la inseparabilidad de los distintos componentes de las praxeologías. En efecto, y como muestran M. Artigue, M. Bosch y J. Gascón en este mismo volumen, los tipos de problemas que formula una PI no se pueden desligar de su componente tecnológico que constituye el nivel privilegiado de la formulación de los fenómenos. En consecuencia, y en coherencia con uno de nuestros postulados epistemológicos, la modalidad de diálogo que parte de los tipos de problemas que se abordan involucrará de manera radical al resto de los componentes de ambas PI.

En las otras modalidades de diálogos que hemos desarrollado anteriormente, se han puesto de manifiesto los mecanismos que aportan puntos de «impulso» para cada una de las praxeologías de investigación. Es de esperar que en la tercera modalidad, que todavía no hemos iniciado, también aparezcan, al lado de las dificultades esperadas, nuevas funcionalidades de los puntos de encuentro que ya hemos identificado. Así, por ejemplo, el hacer explícita la dimensión institucional —siempre presente en los problemas que aborda la TAD— en los análisis que realiza la teoría APOS, puede ayudar a aproximar la problemática de esta a la problemática de la TAD. Y, recíprocamente, en la medida en que la TAD incluya en su ámbito de interés la interpretación de la dinámica praxeológica sugerida por los mecanismos de evolución de un esquema (mediante los tres niveles *intra*-, *inter*-, *trans*-), tendremos un acercamiento de la TAD a las cuestiones problemáticas que plantea la teoría APOS. En otras palabras, las aportaciones de las dos primeras modalidades de diálogo constituyen herramientas esenciales para que cada una de las PI pueda formular algunos de sus problemas en términos más compatibles con la otra, lo que no hace más que corroborar, de nuevo, la unidad indisoluble de los componentes de una praxeología de investigación.

Digamos, para acabar, que lo que se ha podido considerar habitualmente como enfoques inconmensurables cuando solo se ha tomado en consideración el componente teórico de las praxeologías de investigación, no aparece aquí, después de este trabajo conjunto entre APOS y TAD, como una característica intrínseca de las PI. En efecto, este trabajo pone de manifiesto que cuando la práctica científica —y las personas que la llevan a cabo— juega un papel central en el diálogo, en coherencia con el papel igualmente nuclear que juega dicha práctica en el desarrollo de las praxeologías de investigación, enfoques aparentemente muy alejados pueden dialogar con resultados muy fecundos, sin tener que renunciar a sus respectivas asunciones básicas, ampliando su problemática y ámbito de aplicación y desarrollando, sin violentarla, su propia lógica interna.

Referencias

Arnon I., Nesher, P. & Niremburg, R. (2001). Where do fractions encounter their equivalents? Can this encounter take place in elementary-school? *International Journal of Computers for Mathematical Learning*, *6*, 167-214.

Artigue, M., Bosch, M. & Gascón, J. (2011). La TAD face au problème de l'intégration de cadres théoriques en didactique des mathématiques. En M. Bosch et al. (Eds.), *Un panorama de la TAD* (pp. 33-55). Barcelona: CRM.

Artigue, M., Bosch, M., Gascón, J. & Lenfant, A. (2010). Research problems emerging from a teaching episode: a dialogue between TDS and ATD. En V. Durand-Guerrier, S. Soury-Lavergne & F. Arzarello (Eds.), *Proceedings of the Sixth Congress of the European Society for Research in Mathematics Education* (pp. 1535-1544). Lyon, Francia: INRP.
http:// www.inrp.fr/editions/cerme6

Arzarello, F., Bosch, M., Gascón, J. & Sabena, C. (2008). The ostensive dimension through the lenses of two didactic approaches. *ZDM The International Journal on Mathematics Education, 40*, 179-188.

Asiala, A., Brown, A., De Vries, D., Dubinsky, E., Mathews, D. & Thomas, K. (1996). A framework for research and curriculum development in undergraduate mathematics education. En J. Kaput, A. Shoenfeld & E. Dubinsky (Eds.), *Research in Collegiate Mathematics Education 2* (pp. 1-32). Providence, RI: AMS & Washington, DC: MAA.

Asiala, M., Cotrill, J., Dubinsky, E. & Schwingendorf, K. E. (1997). The development of students' graphical understanding of the derivative. *The Journal of Mathematical Behavior, 16*(4), 399-431.

Baker, B., Cooley, L., & Trigueros, M. (2000). A calculus graphing schema. *Journal for Research in Mathematics Education*, *31*, 557-578.

Barquero, B., Bosch, M. & Gascón, J. (2008). Using research and study courses for teaching mathematical modelling at university level. En D. Pitta-Pantazi & G. Philippou (Eds.), *Proceedings of the Fifth Congress of the European Society for Research in Mathematics Education* (pp. 2050-2059). Nicosia: Cyprus University Press.

Berthelot, R. & Salin, M. H. (1996). L'enseignement des angles aux élèves de 10 à 13 ans : identification d'un obstacle didactique. *Revue des sciences de l'éducation*, *22*(2), 417-442.

Bikner-Ahsbahs, A., Dreyfus, T., Kidron, I., Arzarello, F., Radford, L., Artigue, M. & Sabena, C. (2010). Networking of theories in mathematics education. En M. M. F. Pinto & T. F. Kawasaki (Eds.), *Proceedings of PME 34*, vol. 1 (pp. 145-175). Belo Horizonte, Brazil.

Bosch, M., Fonseca, C. & Gascón, J. (2004). Incompletitud de las organizaciones matemáticas locales en las instituciones escolares. *Recherches en didactique des mathématiques, 24*(2), 205-250.

Bosch, M. & Chevallard, Y. (1999). La sensibilité de l'activité mathématique aux ostensifs. Objet d'étude et problématique. *Recherches en didactique des mathématiques, 19*(1), 77-124.

Bosch, M., Espinoza, L. & Gascón, J. (2003). El profesor como director de procesos de estudio: análisis de organizaciones didácticas espontáneas. *Recherches en didactique des mathématiques, 23*(1), 79-136.

Bosch, M. & Gascón, J. (2005). La praxéologie comme unité d'analyse des processus didactiques. En A. Mercier & C. Margolinas (Coord.), *Balises en didactique des mathématiques* (pp. 107-122). Grenoble, Francia: La Pensée sauvage.

Bosch, M. & Gascón, J. (2006). 25 years of the didactic transposition, *Bulletin of the International Commission on Mathematical Instruction, 58*, 51-65.

Breidenbach, D., Dubinsky, E., Hawks, J. & Nichols, D. (1992). Development of the process conception of function. *Educational Studies in Mathematics, 23*, 247-285.

Brousseau, G. (1989). Obstacles épistémologiques, conflits sociocognitifs et ingénierie didactique. En N. Bednarz & C. Garnier (Dir.), *Construction des savoirs. Obstacles et conflits*, *Actes du colloque international « Obstacle épistémologique et conflit socio-cognitif »* (p. 277-285). Ottawa: Cirade/Agence d'Arc.

Brousseau, G. (1997). *Theory of Didactical Situations in Mathematics. Didactique des Mathématiques 1970-1990.* Dordrecht, Holanda: Kluwer Academic Publishers.

Brown, A., Thomas, K. & Tolias, G. (2002). Conceptions of divisibility: success and understanding. En S. Campbell & R. Zazkis (Eds.), *Learning and teaching number theory* (pp. 41-82). Westport, CT: Ablex Publishing.

Campero, J. & Trigueros, M. (2010). Propuesta didáctica en optimización dinámica. Investigación en el aula. *Educación Matemática, 22*, 87-117.

Chevallard, Y. (1985). *La transposition didactique. Du savoir savant au savoir eneigné*. Grenoble, Francia: La Pensée sauvage.

Chevallard, Y. (1989). Le concept de rapport au savoir. Rapport personnel, rapport institutionnel, rapport officiel. En A. Bessot (Ed.), *Actes du séminaire de didactique des mathématiques et de l'informatique 1988-1989* (pp. 211-235). Grenoble, Francia: LSD-IMAG.

Chevallard, Y. (1992). Concepts fondamentaux de la didactique: perspectives apportées par une approche anthropologique. *Recherches en didactique des mathématiques, 12*(1), 73-112.

Chevallard, Y. (1997). Familière et problématique, la figure du professeur. *Recherches en didactique des mathématiques, 17*(3), 17-54.

Chevallard, Y. (1999). L'analyse des pratiques enseignantes en théorie anthropologique du didactique. *Recherches en didactique des mathématiques, 19*(2), 221-266.

Chevallard, Y. (2007). Passé et présent de la théorie anthropologique du didactique. En L. Ruiz Higueras, A. Estepa & F. J. García (Eds.), *Sociedad, escuela y matemáticas. Aportaciones de la teoría antropo-*

lógica de lo didáctico (pp. 705-746). Jaén: Publicaciones de la Universidad de Jaén.

Chevallard, Y., Bosch, M. & Gascón, J. (1997). *Estudiar Matemáticas. El eslabón perdido entre enseñanza y aprendizaje.* Barcelona: ICE/ Horsori.

Clark, J., Cordero, F., Cottrill, J., Czarnocha, B., De Vries, D. & St. John, D. (1997). Constructing a schema: The case of the chain rule. *Journal of Mathematical Behavior, 16*, 345–364.

Cooley, L., Trigueros, M. & Baker, B. (2007). Schema thematization: a framework and an example. *Journal for Research in Mathematics Education, 38*(4), 370-392.

Czarnocha, B., Dubinsky, E., Prabhu, V. & Vidakovic, D. (1999). One theoretical perspective in undergraduate mathematics education research. En O. Zaslavsky (Ed.), *Proceedings of the 23rd Conference of PME,* vol. 1 (pp. 95-110). Haifa, Israel: PME.

Dubinsky, E. & Harel, G. (1992). The process conception of function. En G. Harel & E. Dubinsky (Eds.), *The concept of function: Aspects of epistemology and pedagogy* (pp. 85-106). Washington, D.C.: The Mathematical Association of America.

Dubisnky, E. & Lewin, P. (1986): Reflective abstraction and mathematics education: The genetic decomposition of induction and compactness. *The Journal of Mathematical Behavior 5*, 55-92.

Dubinsky, E. (1991). *Reflective abstraction in advanced mathematical thinking*. En D. Tall (Ed.), *Advanced Mathematical Thinking* (pp. 95-123). Dordrecht, Holanda: Kluwer Academic Publishers.

Dubinsky, E. (1996). Aplicación de la perspectiva piagetiana a la educación matemática universitaria. *Educación Matemática, 8*(3), 24-41.

Dubinsky, E. & McDonald, M. (2001). APOS: A constructivist theory of learning in undergraduate mathematics education research. En D. Holton (Ed.), *The Teaching and Learning of Mathematics at University Level: An ICMI Study* (pp. 273-280). Dordrecht, Holanda: Kluwer Academic Publishers.

García, F. J., Gascón, J., Ruiz Higueras, L. & Bosch, M. (2006). Mathematical modelling as a tool for the connection of school mathematics.

ZDM The International Journal on Mathematics Education, 38(3), 226-246.

Gascón, J. (1998). Evolución de la didáctica de las matemáticas como disciplina científica. *Recherches en didactique des mathématiques, 18*(1), 7-34.

Gascón, J. (2003). From the cognitive to the epistemological programme in the didactics of mathematics: Two incommensurable scientific research programmes? *For the Learning of Mathematics, 23*(2), 44-55.

Kidron, I., Lenfant, A., Bikner-Ahsbahs, A., Artigue, M. & Dreyfus, T. (2008). Toward networking three theoretical approaches: the case of social interactions. *ZDM The International Journal on Mathematics Education, 40*(2), 247-264.

Laudan, L. (1977). *Progress and its problems*. Berkeley, CA: University of California Press. (Traducción castellana: *El progreso y sus problemas*, Madrid: Encuentro, 1986.)

Martínez-Planell, R. & Trigueros Gaisman, M. (2009). Students' ideas on fucntions of two variables: Domain, range, and representations. En S. L. Swars, D. W. Stinson & S. Lemons-Smith (Eds.), *Proceedings of the 31st annual meeting of the North American Chapter of the International Group for the Psychology of Mathematics Education 5* (pp. 73-80). Atlanta, GA: Georgia State University.

McDonald, M., Mathews, D. & Strobel, K. (2000). Understanding sequences: A tale of two objects. En E. Dubinsky, J. Kaput & A. Schoenfeld (Eds.), *Research in Collegiate Mathematics Education 4* (pp. 77-102). Providence, RI: AMS & Washington, DC: MAA.

Parraguez, M. & Oktaç, A. (2010). Construction of the vector space concept from the viewpoint of APOS theory. *Linear Algebra and its Applications, 432*, 2112-2124.

Piaget, J. & García, R. (1982). *Psicogénesis e historia de la ciencia*. México, D. F.: Siglo XXI editores (4ª edición).

Pólya, G. (1945). *How to solve it* (2nd ed. 1957). Princeton, NJ: Princeton University Press.

Prediger, S., Arzarello, F., Bosch, M. & Lenfant A. (2008). Comparing, combining, coordination – Networking strategies for connecting theoretical approaches. *ZDM The International Journal on Mathematics Education, 40*(2), 163-164.

Prediger, S., Bosch, M., Kidron, I., Monaghan J. & Sensevy, G. (2010). Introduction. Different theoretical perspectives and approaches in mathematics education research – Strategies and difficulties when connecting theories. En V. Durand-Guerrier, S. Soury-Lavergne & F. Arzarello (Eds.), *Proceedings of the Sixth Congress of the European Society for Research in Mathematics Education* (pp. 1529-1534). Lyon, Francia: INRP. http://www.inrp.fr/editions/cerme6

Rodríguez, E., Bosch, M. & Gascón, J. (2008). A networking method to compare theories: metacognition in problem solving reformulated within the anthropological theory of the didactic. *ZDM The International Journal on Mathematics Education, 40*(2), 287-301.

Ruiz, N., Bosch, M., Gascón, J. (2008): The functional algebraic modelling at secondary level. En D. Pitta-Pantazi & G. Philippou (Eds.), *Proceedings of the Fifth Congress of the European Society for Research in Mathematics Educacion* (pp. 2170-2179). Nicosia: Cyprus University Press.

Salgado, H. & Trigueros, M. (2009). Conteo: una propuesta didáctica y su análisis. *Educación Matemática, 21*, 91-117.

Schoenfeld, A. H. (1985). *Mathematical problem solving.* San Diego, CA: Academic Press.

Schoenfeld, A. H. (2007). Problem solving in the United States, 1970-2008: Research and theory, practice and politics. *ZDM The International Journal on Mathematics Education, 39*, 537–551.

Tall, D. O. (2003). Using techology to support an embodied approach to learning concepts in mathematics. En L. M. Carvalho & L. J. Guimarãces (Eds.), *Historia e Tecnologia no Ensino da Matemática 1* (pp. 1-28). Rio de Janeiro, Brasil.

Trigueros, M. (2005). La noción de esquema en la investigación en matemática educativa a nivel superior. *Educación Matemática, 17*, 5-31.

Trigueros M., Oktaç, A. & Manzanero, L. (2007). Understanding of systems of equations in linear algebra. En D. Pitta-Pantazi &

G. Philippou (Eds.), *Proceedings of the V[th] Congress of the European Society for Research in Mathematics Education* (pp. 2359-2368). Nicosia: Cyprus University Press.

Trigueros, M. & Oktaç, A. (2005). La théorie APOS et l'enseignement de l'algèbre linéaire. *Annales de didactique et sciences cognitives, 10*, 157-176.

Trigueros, M. & Martínez-Planell, R. (2010). Geometric representations in the learning of two variable functions. *Educational Studies in Mathematics, 73*, 3-19.

Vidakovic, D. (1997). Learning the concept of inverse function in a group versus individual environment. En E. Dubinsky, D. Mathews & B. Reynolds (Eds.), *Readings in Cooperative Learning*. *MAA Notes 44* (pp. 173-195). Providence, RI: AMS & Washington, DC: MAA.

Weller, K., Clark, J. M., Dubinsky, E., Loch, S., McDonald, M. A. & Merkovsky, R. R. (2003). Student performance and attitudes in courses based on APOS theory and the ACE teaching cycle. En A. Selden, E. Dubinsky, G. Harel & F. Hitt (Eds.), *Research in Collegiate Mathematics Education V. CBMS Issues in Mathematics Education 12* (pp. 97-131). Providence, RI: AMS & Washington, DC: MAA.

Weller, K., Montgomery, A., Clark, J., Cottrill, J., Trigueros, M., Arnon, I. & Dubinsky, E. (2002). *Learning linear algebra with ISETL.* http://pc75666.math.cwu.edu/~montgomery/scholar/2002/0731-b-llawi.pdf
http://homepages.ohiodominican.edu/~cottrilj/datastore/linear-alg/LLAWI-P3.pdf

Zazkis, R. & Campbell, S. (1996a). Divisibility and multiplicative structure of natural numbers: Preservice teachers' understanding. *Journal for Research in Mathematics Education, 27*(5), 540-563.

Zazkis, R. & Gunn, Ch. (1997). Sets, subsets, and the empty set: Students' constructions and mathematical conventions. *Journal of Computers in Mathematics and Science Teaching, 16*(1), 133-169.